Übertragungsfunktion eines optischen Resonators

Eine elementare Herleitung

A. Donges

1 Problemstellung

Auf einen optischen Resonator (bzw. Fabry-Perot-Interferometer), der aus zwei planen, teildurchlässigen Spiegeln besteht, fällt eine monochromatische Lichtwelle E_{ein} mit der Kreisfrequenz ω ein. An jedem Spiegel finden Transmissionen und Reflexionen statt, die zu einer unendlich großen Anzahl von Teilwellen führen (siehe Abb. 1). In dem vorliegenden Aufsatz werden die Intensitäten der transmittierten und reflektierten Welle berechnet.

Zur Vereinfachung werden die folgenden Annahmen gemacht:

- Die Welle E_{ein} fällt senkrecht auf den Resonator ein.
- Der Einfluss der Beugung wird vernachlässigt.
- Mögliche Phasenverschiebungen [1, 2] bei der Transmission durch einen teildurchlässigen Spiegel bleiben unberücksichtigt. Bei den Reflexionen treten Phasensprünge von jeweils 180° auf. Eine einfallende Welle mit der Amplitude E_0 wird daher bei der Reflexion bzw. Transmission an einem Spiegel in zwei Wellen mit den Amplituden

$$E_{0,refl} = -\sqrt{R_i}E_0 \tag{1}$$

und

$$E_{0,trans} = \sqrt{T_i}E_0 \tag{2}$$

zerlegt. Hierbei sind R_i und T_i die auf die Intensität bezogenen Reflexions- und Transmissionsfaktoren der beiden Spiegel ($i = 1, 2$).

2 Berechnung der Übertragungsfunktion

Bei einem optischen Resonator handelt es sich um ein *rückgekoppeltes System* (Abb. 2) [1]. Die Welle E_{aus} zur Zeit t hängt

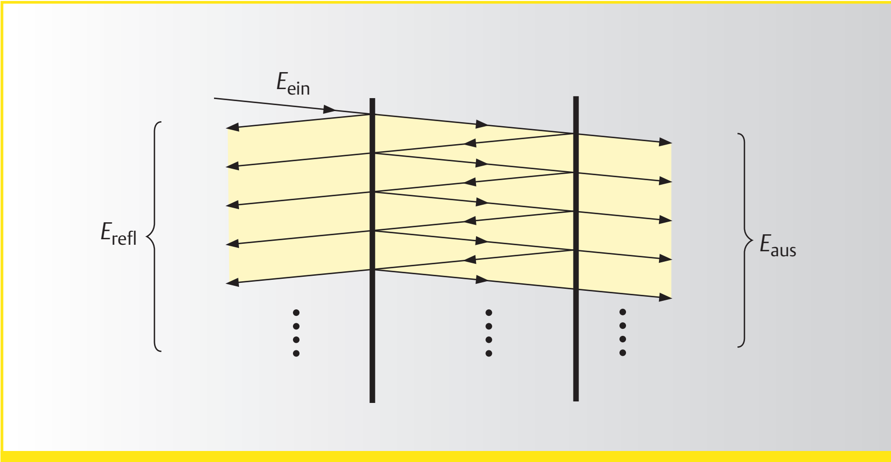

Abb. 1: Auf einen optischen Resonator fällt eine Welle auf und wird durch Reflexionen und Transmissionen in eine Vielzahl von Wellen aufgespaltet

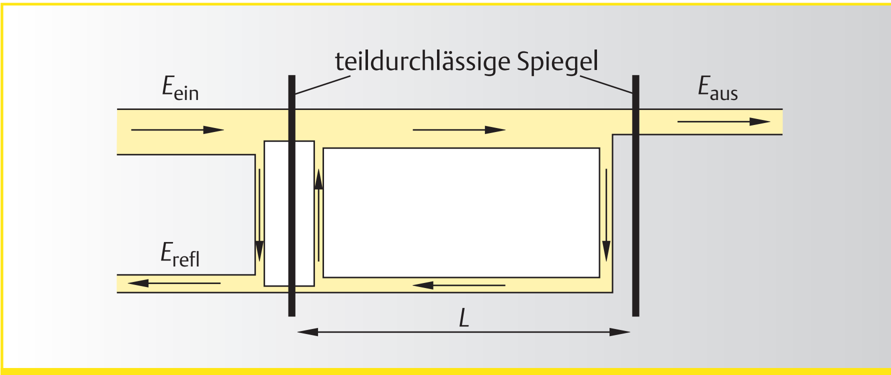

Abb. 2: Schematische Darstellung des Rückkopplungsprinzips am Beispiel des optischen Resonators

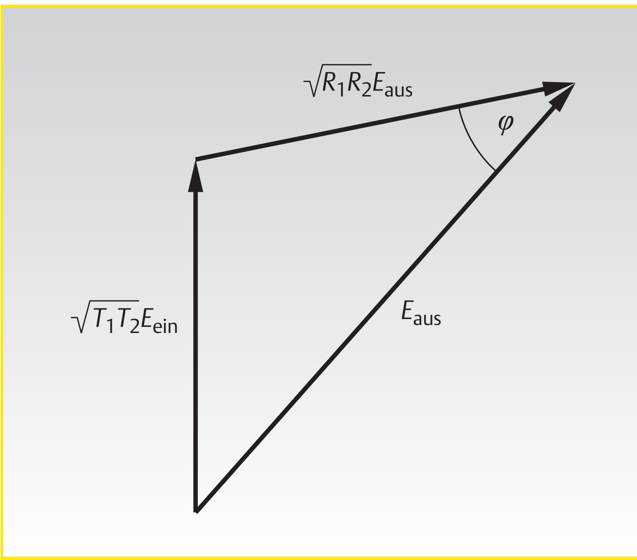

Abb. 3: Veranschaulichung der Gleichung (3) im Zeigerdiagramm

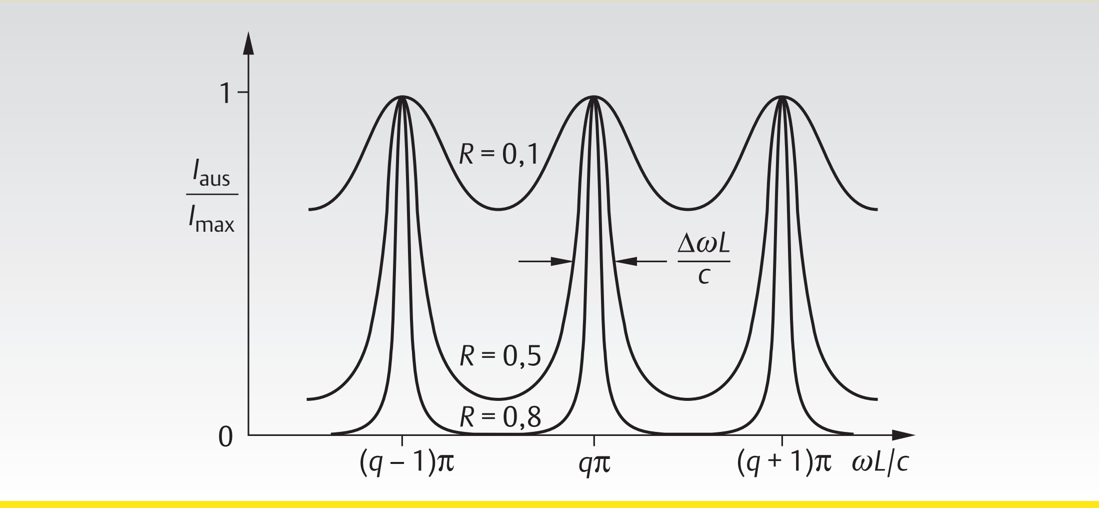

Abb. 4: Verlauf der auf I_{max} normierten Ausgangsintensität I_{aus} in Abhängigkeit der normierten Eigenkreisfrequenz

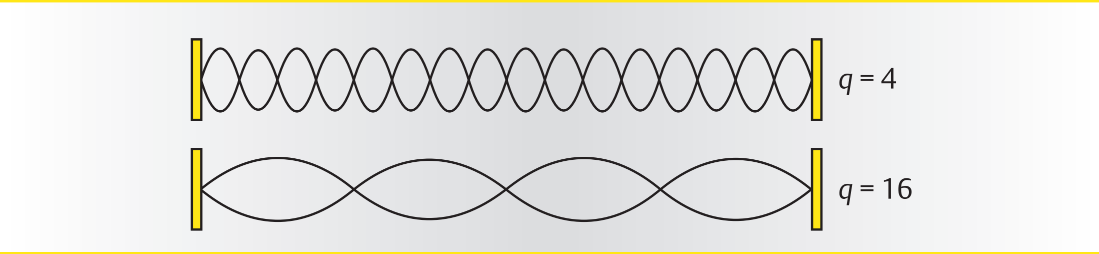

Abb. 5: Stehende Wellen

daher von dem Eingangssignal E_{ein} zur Zeit $t - L/c$ und dem Ausgangssignal E_{aus} zur Zeit $t - 2L/c$ ab. Hierbei bedeuten L den Spiegelabstand und c die Lichtgeschwindigkeit im Resonator. Es gilt die für rückgekoppelte Systeme typische Gleichung [3]

$$E_{aus}(t) = \sqrt{T_1T_2}E_{ein}\left(t-\frac{L}{c}\right) + \sqrt{R_1R_2}E_{aus}\left(t-\frac{2L}{c}\right). \quad (3)$$

In Worten: Das Ausgangssignal setzt sich aus einem abgeschwächten Eingangssignal (verzögert um die einfache Laufzeit L/c) und einem rückgekoppelten Anteil (verzögert um die doppelte Laufzeit $2L/c$) zusammen.

Gleichung (3) lässt sich in einem Zeigerdiagramm [4, 5, 6] veranschaulichen (siehe Abb. 3).

Bei der Zeichnung bzw. deren Interpretation ist darauf zu achten, dass

- die Längen der Zeiger den Amplituden der entsprechenden Wellen proportional sind,
- die vektorielle Summe der beiden Zeiger

$$\sqrt{T_1T_2}E_{ein}$$

und

$$\sqrt{R_1R_2}E_{aus}\left(t-\frac{2L}{c}\right)$$

den Zeiger $E_{aus}(t)$ ergibt sowie

- die beiden Zeiger $E_{aus}(t)$ und

$$\sqrt{R_1R_2}E_{aus}\left(t-\frac{2L}{c}\right)$$

einen Winkel

$$\varphi = \frac{2\omega L}{c} \quad (4)$$

bilden (ω ist die Kreisfrequenz der Lichtwelle).

Dieser Winkel stellt die durch die Laufzeit bedingte Phasenverschiebung zwischen den Wellen $E_{aus}(t)$ und

$$\sqrt{R_1R_2}E_{aus}\left(t-\frac{2L}{c}\right)$$

dar.

Mit dem Kosinussatz liest man aus Abb. 3 ab:

$$T_1T_2E_{ein}^2 = E_{aus}^2 + R_1R_2E_{aus}^2 - 2\sqrt{R_1R_2}E_{aus}^2\cos\left(\frac{2\omega L}{c}\right). \quad (5)$$

Wird (5) nach E_{aus}^2 aufgelöst und berücksichtigt, dass das Quadrat der Feldstärke der Intensität I der Welle proportional ist, so ergibt sich

$$I_{aus} = \frac{T_1T_2}{1+R_1R_2-2\sqrt{R_1R_2}\cos\left(\frac{2\omega L}{c}\right)}I_{ein}. \quad (6a)$$

Mit den Abkürzungen

$$T = \sqrt{T_1T_2} \quad (7a)$$

und

$$R = \sqrt{R_1R_2} \quad (7b)$$

(geometrische Mittelwerte) folgt nach kurzer Rechnung schließlich

$$\frac{I_{aus}}{I_{ein}} = \frac{T^2}{(1-R)^2+4R\sin^2\left(\frac{\omega L}{c}\right)}. \quad (6b)$$

Wir bezeichnen im Sinne der Systemtheorie (6b) als Übertragungsfunktion des Resonators (bezüglich der Intensität). Werden mögliche Absorptionen außer acht gelassen, so folgt aus dem Energieerhaltungssatz für die Intensität der vom Resonator reflektierten

Welle

$$\frac{I_{refl}}{I_{ein}} = 1-\frac{T^2}{(1-R)^2+4R\sin^2\left(\frac{\omega L}{c}\right)}. \quad (8)$$

3 Kurze Diskussion der Übertragungsfunktion

Wir betrachten im Weiteren nur (6b), d. h. die durchgelassene Intensität I_{aus}. Die Intensitätsmaxima bzw. -minima betragen

$$\frac{I_{max}}{I_{ein}} = \frac{T^2}{(1-R)^2} \quad (9)$$

bzw.

$$\frac{I_{min}}{I_{ein}} = \frac{T^2}{(1+R)^2}. \quad (10)$$

Die Maxima werden bei den Eigenkreisfrequenzen

$$\omega_q = q\frac{\pi c}{L} \quad (11)$$

$$(q = 1, 2, 3, ...)$$

angenommen (siehe Abb. 4). Wegen

$$\omega_q = \frac{2\pi c}{\lambda} \quad (12)$$

(λ: Wellenlänge) ist

$$L = q\frac{\lambda}{2} \quad (13)$$

$$(q = 1, 2, 3, ...).$$

Bei einer Eigenkreisfrequenz passt genau ein ganzzahliges Vielfaches einer halben Wellenlänge in den Resonator (Dies ist auch die Bedingung, dass sich eine stehende Lichtwelle (siehe Abb. 5) im Fall $R_1 = R_2 = 1$ ausbilden kann [7]. Bei identischen, verlustfreien Spiegeln ($R_1 = R_2$ und $T_1 = 1 - R_1 = T_2 = 1 - R_2$) wird

$$I_{max} = I_{ein}, \quad (14)$$

was auf den ersten Blick paradox erscheint: Eine Lichtwelle tritt ohne eine Abschwächung durch zwei reflektierende Spiegel hindurch! Die Frequenzbereiche, in denen der Resonator hohe Transparenz zeigt, werden um so schmaler, je höher die Reflexionsfaktoren der beiden Spiegel gewählt werden (siehe Abb. 3). Die Halbwertsbreite (Bandbreite) lässt sich bei hohen Reflexionsfaktoren zu

$$\Delta\omega = \frac{(1-R)c}{L} \quad (15)$$

abschätzen [8].

Literatur

[1] *A. Donges*: The Fabry-Perot interferometer as an optical feedback system. European Journal of Physics 18 (1997), S. 338-342

[2] *A. Donges*: Widerspricht das Superpositionsprinzip dem Energieerhaltungssatz? Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht 7/48 (1995), S. 413-414

[3] *H. Gassmann*: Regelungstechnik - Ein praxisorientiertes Lehrbuch. Frankfurt am Main: Verlag Harri Deutsch (2001), S. 108

[4] *J. Schreiner*: Physik für die Sekundarstufe II, Teil 2. Frankfurt Main: Verlag Moritz Diesterweg / Otto Salle (1978), S. 12

[5] *F. Dorn, F. Bader*: Physik für die Oberstufe MS. Hannover: Schroedel Schulbuchverlag (1983), S. 225-228

[6] *P. Bastian* et. al: Fachkunde Elektrotechnik. Wuppertal: Verlag Europa-Lehrmittel (1989), S. 121-122

[7] *R. Leute*: Grundwissen Physik A/B. Stuttgart: Ernst Klett Verlag (1975), S. 39

[8] *A. Donges*: Physikalische Grundlagen der Lasertechnik. Heidelberg: Hüthig Verlag (2000), S. 61

Anschrift des Verfassers
Prof. Dr. *Axel Donges*, Fachhochschule und Berufskollegs NTA Prof. Dr. Grübler gGmbH, Seidenstraße 12-35, D-88316 Isny im Allgäu,
E-Mail: ADonges@web.de

Altlasten der Physik (96): Kraftfelder

F. Herrmann

Gegenstand

„Wie die in der Natur vorkommenden Kräfte beschaffen sind, d. h. von welchen Größen sie abhängen und wie diese Abhängigkeit aussieht, kann man nur auf Grund der Erfahrung sagen. Diese lehrt, dass die (in der Mechanik interessierenden) Kräfte, die auf einen Massenpunkt *m* wirken, von dessen Ortsvektor und/oder seiner Geschwindigkeit

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}}$$

und auch von der Zeit abhängen können. Es wird also im allgemeinen Fall eine Kraft

$$\vec{K} = \vec{K}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

sein.“ [1]

„Als physikalischer Fachbegriff bezeichnet Kraft die Fähigkeit, die Bewegung eines Körpers zu ändern (Richtungsänderung oder Beschleunigung) oder einen Körper zu verformen. Sie ist eine Feldgröße.“ [2]

„Die Kraft ist eine ortsabhängige vektorielle Größe, also

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}).\text{“ [3]}$$

Mängel

Jeder von uns Physikern muss durch die theoretische Mechanik hindurch. Dort lernen wir unter anderem, was unser erstes Zitat zum Ausdruck bringt: Die Kraft hängt von Ort, Geschwindigkeit und Zeit ab. Der Satz beinhaltet eine Behauptung, die in den beiden anderen aus Wikipedia stammenden Zitaten noch etwas pointierter ausgedrückt wird: Die Kraft ist eine Feldgröße. Diese Aussage ist aber, mindestens wenn man sie so allgemein formuliert, nicht richtig. Warum?

Der Wert einer physikalischen Größen bezieht sich immer auf irgendetwas, und immer wenn man einen Wert angibt, muss klar sein worauf. So gibt es Größen, deren Werte sich auf einen Punkt beziehen, z. B. die Temperatur, der Druck und die elektrische Feldstärke. Bei anderen Größen bezieht sich der Wert auf eine Fläche. Hierzu gehören alle Ströme und Flüsse: die elektrische Stromstärke, die Leistung (der Energiestrom), der magnetische Fluss und die Kraft (der Impulsstrom). Bei wieder anderen bezieht sich der Wert auf ein Raumge-