

Eine einfache Herleitung des Pauli-Prinzips

von

Axel Donges

Fachhochschule und Berufskollegs NTA Prof. Dr. Grübler gGmbH
Seidenstraße 12-35, D-88316 Isny im Allgäu, eMail: ADonges@web.de

erschienen in: Praxis der Naturwissenschaften - Physik in der Schule 1/53
(2004), S. 41-43

Zusammenfassung

Im Physikunterricht wird das Pauli-Prinzip üblicherweise als Postulat eingeführt. In diesem Aufsatz wird an einem sehr einfachen Spezialfall das Pauli-Prinzip hergeleitet. Dabei wird nicht explizit von der Schrödinger-Gleichung Gebrauch gemacht.

1. Einleitung

Das *Pauli-Prinzip* gehört zu den wichtigsten Erkenntnissen der Quantenphysik. Es muss daher in der Schule behandelt werden. Da es sich um ein *quantenmechanisches Phänomen* handelt, kann es nicht im Rahmen der klassischen Physik anschaulich erklärt werden. Daher wird das Pauli-Prinzip in der Schule üblicherweise als Postulat eingeführt. In diesem Aufsatz wird gezeigt, wie für einen einfachen Spezialfall das Pauli-Prinzip auf Leistungskurs-Niveau hergeleitet werden kann. Wir betrachten dazu *zwei nichtwechselwirkende, identische* Teilchen, die in einem eindimensionalen Potentialtopf mit unendlich hohen Wänden eingeschlossen sind.

2. Ein Teilchen im Potentialtopf

Zunächst wird die eindimensionale Bewegung *eines* Teilchens, das wegen undurchdringbarer Wände sich nur im Bereich $0 \leq x \leq L$ aufhalten kann, untersucht. *L. de Broglie* wies als erster darauf hin, dass das Teilchen durch eine *Materiewelle* beschrieben werden muss [1]. In Analogie zum Fall eines beidseitig eingespannten Seils [2] ist die zeitabhängige *Wellenfunktion* in diesem Fall durch die *stehende Welle*

$$\varphi(x, t) = \varphi(x) \sin(\omega t + \delta) \quad (0 \leq x \leq L) \quad (1)$$

gegeben. Hierbei sind

$$\varphi(x) \propto \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) \quad (2)$$

die zeitunabhängige Wellenfunktion,

$$\omega = \frac{2\pi c_{ph}}{\lambda} \quad (3)$$

die Kreisfrequenz, c_{ph} die Phasengeschwindigkeit (deren Zahlenwert für die weitere Betrachtung unerheblich ist), λ die Materiewellenlänge und δ ein beliebiger Phasenwinkel der stehenden Materiewelle. Damit die stehende Welle an den Wänden verschwindet, erfüllt die Materiewellenlänge die Resonanzbedingung

$$L = n \frac{\lambda}{2}, \quad (4)$$

wobei die *Quantenzahl* n eine natürliche Zahl ist ($n = 1, 2, 3, \dots$). Nach *de Broglie* ist die Materiewellenlänge λ mit dem Impuls p des Teilchens über die Gleichung

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (5)$$

(h : Plancksche Konstante) verknüpft [1]. Die Energie des Teilchens ist daher quantisiert

$$E_n = \frac{p^2}{2m} = n^2 \frac{h^2}{8mL^2} \quad (6)$$

(m : Masse des Teilchens). Die stets positive Größe

$$\varphi_n^2(x) \propto \sin^2\left(n \frac{\pi}{L} x\right) \quad (7)$$

heißt *Wahrscheinlichkeitsdichte*. Sie wird als Maß für die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen in der Umgebung der Stelle x zu finden, interpretiert¹.

3. Zwei Teilchen im Potentialtopf

Nun setzen wir ein weiteres, *identisches* Teilchen in den Potentialtopf hinein. Es wird angenommen, dass die beiden Teilchen A und B nicht miteinander in Wechselwirkung stehen. Aus diesem Grunde gelten die Gleichungen (6) und (7) sowohl für Teilchen A als auch für Teilchen B. Die Gesamtenergie beider Teilchen ist durch die Summe der Einzelenergien gegeben,

$$E_{n_A, n_B} = \left(n_A^2 + n_B^2\right) \frac{h^2}{8mL^2} \quad (8)$$

wobei nun zwei Quantenzahlen $n_A = 1, 2, 3, \dots$ und $n_B = 1, 2, 3, \dots$ benötigt werden (siehe Abb. 1).

¹ Genauer: $\int_{x_1}^{x_2} \varphi^2(x) dx$ ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen bei einer Messung im Bereich $x_1 \leq x \leq x_2$ vorzufinden.

Aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung ist bekannt, dass die Wahrscheinlichkeit Teilchen A bei x_A und Teilchen B bei x_B zu finden, durch das Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten gegeben ist.

$$\varphi_{n_A, n_B}^2(x_A, x_B) \propto \sin^2\left(n_A \frac{\pi}{L} x_A\right) \sin^2\left(n_B \frac{\pi}{L} x_B\right) \quad (9)$$

Die zeitunabhängige Wellenfunktion des Zwei-Teilchen-Zustandes sollte daher von der Form

$$\varphi_{n_A, n_B}(x_A, x_B) \propto \sin\left(n_A \frac{\pi}{L} x_A\right) \sin\left(n_B \frac{\pi}{L} x_B\right) \quad (10)$$

sein. Allerdings soll Gl. (10) noch modifiziert werden.

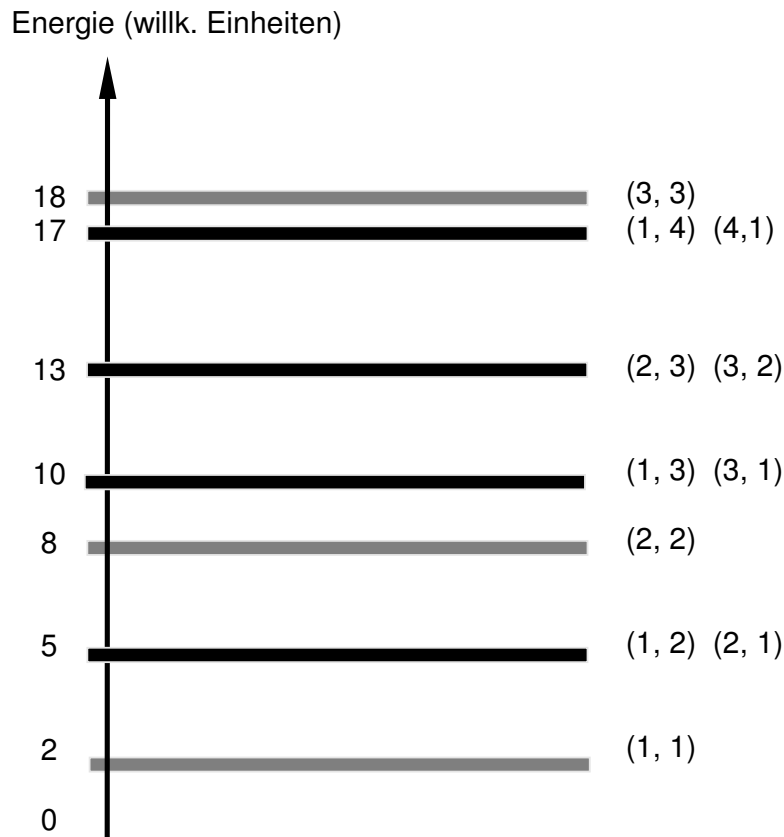


Abb. 1: Energiespektrum des betrachteten Zwei-Teilchen-Systems

4. Diskussion der Wellenfunktion (8) des Zwei-Teilchen-Zustandes

In Abbildung 2 ist jeder mögliche Quantenzustand des Zwei-Teilchen-Systems durch einen Punkt in der $n_A - n_B$ -Ebene gekennzeichnet. Beispielsweise gehört der Punkt P(4|2) zu der Gesamtenergie

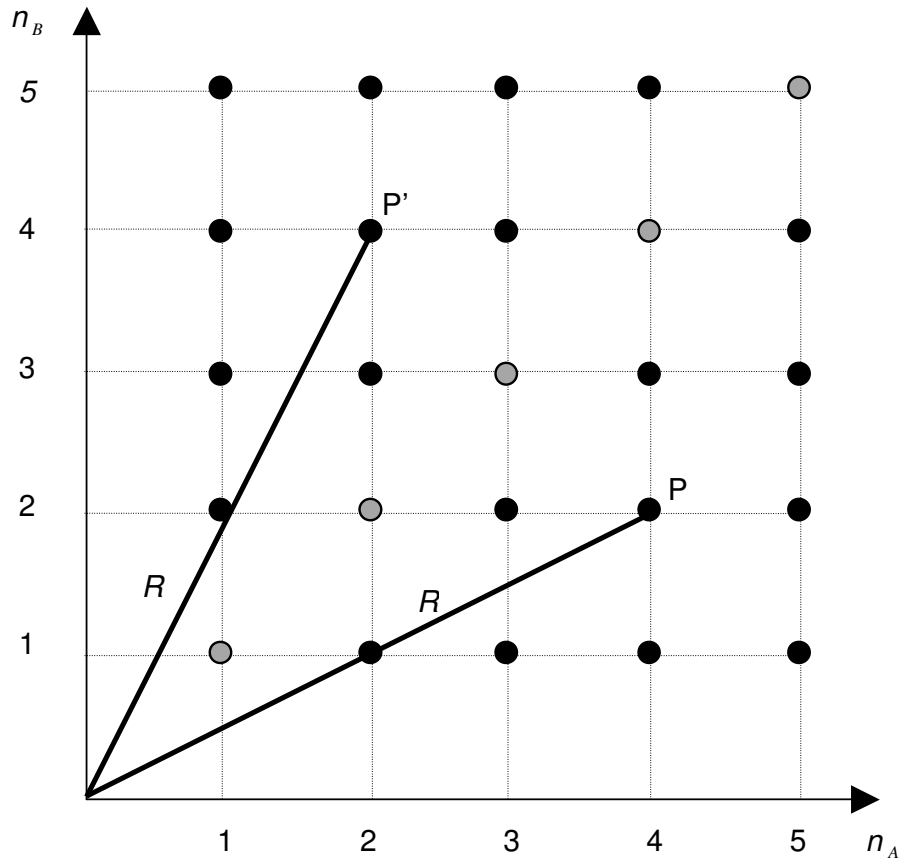


Abb.2: Graphische Darstellung der Quantenzustände in der $n_A - n_B$ -Ebene

$$E_{4,2} = \left(4^2 + 2^2\right) \frac{h^2}{8mL^2} = 20 \frac{h^2}{8mL^2} \quad (11)$$

und der Wellenfunktion

$$\varphi_{4,2}(x_A, x_B) \propto \sin\left(4 \frac{\pi}{L} x_A\right) \sin\left(2 \frac{\pi}{L} x_B\right). \quad (12)$$

Dem Punkt P' (2|4) zugeordnet ist eine andere Wellenfunktion

$$\varphi_{2,4}(x_A, x_B) \propto \sin\left(2 \frac{\pi}{L} x_A\right) \sin\left(4 \frac{\pi}{L} x_B\right) \quad (13)$$

mit der gleichen Energie wie bei Punkt P.

$$E_{4,2} = E_{2,4} \quad (14)$$

Jeder Punkt $Q(n_A|n_B)$ mit $n_A \neq n_B$ des in Abbildung 2 dargestellten Punktgitters wird als *entartet* bezeichnet, da jeweils zwei verschiedenen Wellenfunktionen (φ_{n_A, n_B} und φ_{n_B, n_A}) zum gleichen Energiewert

$$E_{n_A, n_B} = E_{n_B, n_A} \quad (15)$$

gehören.

Die beiden Teilchen A und B sind absolut *identisch*. Man kann daher *prinzipiell* nicht unterscheiden, ob Teilchen A sich im Zustand mit der Quantenzahl n_A und Teilchen B sich im Zustand mit der Quantenzahl n_B befinden oder umgekehrt (d.h. Teilchen A ist im Zustand mit der Quantenzahl n_B und Teilchen B ist im Zustand mit der Quantenzahl n_A). Die korrekte Wellenfunktion des Zwei-Teilchen-Zustandes ist daher eine Linearkombination der entarteten Wellenfunktionen φ_{n_A, n_B} und φ_{n_B, n_A} :

$$\begin{aligned} \varphi_{n_A, n_B}(x_A, x_B) = \\ c_I \sin\left(n_A \frac{\pi}{L} x_A\right) \sin\left(n_B \frac{\pi}{L} x_B\right) + c_{II} \sin\left(n_B \frac{\pi}{L} x_A\right) \sin\left(n_A \frac{\pi}{L} x_B\right). \end{aligned} \quad (16)$$

Für die entsprechende Wahrscheinlichkeitsdichte gilt daher

$$\begin{aligned} \varphi_{n_A, n_B}^2(x_A, x_B) = \\ \left(c_I \sin\left(n_A \frac{\pi}{L} x_A\right) \sin\left(n_B \frac{\pi}{L} x_B\right) + c_{II} \sin\left(n_B \frac{\pi}{L} x_A\right) \sin\left(n_A \frac{\pi}{L} x_B\right) \right)^2 \end{aligned} \quad (17)$$

Da die beiden Teilchen A und B prinzipiell nicht unterschieden werden können, darf sich (die messbare Größe) $\varphi_{n_A, n_B}^2(x_A, x_B)$ nicht ändern, wenn die beiden Teilchen A und B (d.h. wenn die Koordinaten x_A and x_B) vertauscht werden. Es muss daher gelten:

$$c_I^2 = c_{II}^2. \quad (18)$$

Es gibt zwei Lösungen

$$c_I = c_{II} \quad (19a)$$

und

$$c_I = -c_{II}. \quad (19b)$$

Wir müssen daher Gl. (10) durch

$$\begin{aligned} \varphi_{n_A, n_B}^+(x_A, x_B) \propto \\ \sin\left(n_A \frac{\pi}{L} x_A\right) \sin\left(n_B \frac{\pi}{L} x_B\right) + \sin\left(n_B \frac{\pi}{L} x_A\right) \sin\left(n_A \frac{\pi}{L} x_B\right) \end{aligned} \quad (20a)$$

oder

$$\begin{aligned} \varphi_{n_A, n_B}^-(x_A, x_B) \propto \\ \sin\left(n_A \frac{\pi}{L} x_A\right) \sin\left(n_B \frac{\pi}{L} x_B\right) - \sin\left(n_B \frac{\pi}{L} x_A\right) \sin\left(n_A \frac{\pi}{L} x_B\right). \end{aligned} \quad (20b)$$

ersetzen. $\varphi_{n_A, n_B}^+(x_A, x_B)$ ist eine symmetrische und $\varphi_{n_A, n_B}^-(x_A, x_B)$ eine antisymmetrische Funktion.

$$\varphi_{n_A, n_B}^+(x_A, x_B) = \varphi_{n_B, n_A}^+(x_B, x_A) \quad (21a)$$

$$\varphi_{n_A, n_B}^-(x_A, x_B) = -\varphi_{n_B, n_A}^-(x_B, x_A) \quad (21b)$$

In der Natur sind beide Möglichkeiten – Gl. (20a) und Gl. (20b) - realisiert. Teilchen mit symmetrischer Wellenfunktion heißen *Bosonen*. Die Teilchen mit antisymmetrischer Wellenfunktion werden *Fermionen* genannt.

5. Das Pauli-Prinzip

Wenn $n_A = n_B$ ist, verschwindet die antisymmetrische Zwei-Teilchen-Wellenfunktion (20b).

$$\varphi_{n_A, n_B}^-(x_A, x_B) = 0 \quad \text{für} \quad n_A = n_B \quad (22)$$

Das Verschwinden der antisymmetrischen Wellenfunktion bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit, zwei *identische* Teilchen im *gleichen* Quantenzustand (d.h. $n_A = n_B$) zu finden, null ist. Das ist die Aussage des Pauli-Prinzips. Die in Abbildung 1 bzw. 2 grau dargestellten Punkte bzw. Energieniveaus besitzen daher im Fall von Fermionen keine physikalische Realität.

Literatur:

- [1] Donges, A. (1990): Elementare Quantenoptik. Heidelberg: Hüthig, S. 168-174
- [2] Mehnert, K. (1993): Physik im Überblick. Leipzig: Fachbuchverlag, S. 51