WARUM ENTFERNT SICH DER MOND VON DER ERDE?
- EIN BEISPIEL ZUR PHYSIK DES DREHIMPULSES -

Axel Donges
Fachhochschule und Berufskollegs NTA Prof. Dr. Grübler gGmbH, Seidenstraße 12-35, D-88316 Isny im Allgäu, eMail: AD@fh-isny.de

erschienen in: Praxis der Naturwissenschaften - Physik in der Schule 4/53 (2004), S. 42-45

Kurzfassung
Vergleicht man das durch das Rutherfordsche Modell beschriebene Wasserstoffatom mit dem gebundenen System Erde-Mond, so stellt man folgenden Gegensatz fest: Nimmt die Gesamtenergie beider Systeme ab, so verringert sich der Abstand Proton-Elektron, während der Abstand Erde-Mond anwächst. Zur Erklärung dieses paradoxen Verhaltens müssen der Spin und die Rotationsenergie der Erde berücksichtigt werden. Entfernt sich der Mond von der Erde, so nimmt zwar - analog zum Atom - die Energie des Mondes zu, die Gesamtenergie nimmt aber insgesamt (wegen der Abnahme der Rotationsenergie der Erde) ab.

1. Einleitung

Der mittlere Abstand zwischen Erde und Mond nimmt z.Z. etwa 4 cm pro Jahr zu. Ursache ist die so genannte Gezeitenreibung, die dem gebundenen System Erde-Mond mechanische Energie entzieht [1, S. 35]. Diese Tatsache löst teilweise große Verwunderung aus, lernt man doch schon in der Schule, dass beim Rutherfordschen Modell des Wasserstoffatoms das Elektron auf eine Kreisbahn mit kleinerem Radius übergeht, wenn das Atom Licht abstrahlt, also Energie verliert[1] [2]. Wie ist es möglich, dass zwei so ähnliche Systeme (Mond umkreist Erde bzw. Elektron umkreist Proton) so unterschiedlich auf Energieentzug (Kreisradius wird größer bzw. kleiner) reagieren?

2. Einkörperproblem (zwei punktförmige Körper)

Zur Beantwortung dieser Frage betrachten wir zunächst zwei punktförmige Körper mit den Massen m_1 und m_2, die um ihren gemeinsamen Schwerpunkt kreisen[2]. Zur Vereinfachung wird im Weiteren stets angenommen, dass $m_1 >> m_2$ ist. In diesem Fall ruht Körper 1 im Zentrum der kreisförmigen Bahnkurve von Körper 2. Die beiden Körper ziehen sich wechselseitig an. Für den Betrag der Zentralkraft gilt

$$F = \frac{C}{r^2}. \tag{1}$$

Hierbei ist r der Abstand der beiden Körper bzw. der Radius der Kreisbahn und C eine Konstante. Im Fall von Gravitationswechselwirkung ist

$$C = G m_1 m_2 \tag{2}$$

(G: Gravitationskonstante). Beim H-Atom dagegen ist

$$C = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} \tag{3}$$

(e: Elementarladung, ε_0: elektrische Feldkonstante). Damit sich eine stabile Kreisbahn ausbilden kann, muss für die Zentripetalbeschleunigung

$$\omega_B^2 r = \frac{C}{m_2 r^2} \tag{4}$$

gelten. Die Gesamtenergie W des Systems setzt sich aus der kinetischen und potentiellen Energie von Körper 2 zusammen:

$$W = \frac{1}{2} m_2 r^2 \omega_B^2 - \frac{C}{r}. \tag{5}$$

Mit Gl. (4) folgt

$$W = -\frac{C}{2r}. \tag{6}$$

Der Drehimpuls $\vec{L}$ des Systems besteht nur aus dem Bahndrehimpuls von Körper 2. Sein Betrag ist

$$L = m_2 r^2 \omega_B. \tag{7}$$

Mit Gl. (4) lässt sich die Winkelgeschwindigkeit ω_B eliminieren:

$$L = \sqrt{C m_2 r}. \tag{8}$$

Wird Gl. (8) nach r aufgelöst und in Gl. (6) eingesetzt, so folgt

$$W L^2 = -\frac{C^2 m_2}{2} = \text{const.} < 0. \tag{9}$$

Wird dem rotierenden System Energie entzogen (zugeführt), so nimmt nach Gl. (6) der Abstand r der beiden Körper ab (zu). Eine Energieänderung ist nur möglich, wenn mit der Energieänderung

[1] Nach klassischer Vorstellung sollte das kreisende Elektron elektromagnetische Wellen abstrahlen und als Folge in den Atomkern stürzen [3].

[2] Im Allgemeinen sind die geschlossenen Bahnkurven der beiden Körper Ellipsen, wobei ihr gemeinsamer Schwerpunkt in einem Brennpunkt der Ellipse liegt. Zur Vereinfachung wird hier jedoch nur der Fall der Kreisbahn diskutiert.

auch eine Änderung des Drehimpulses einhergeht, damit das Produkt WL^2 konstant bleibt.

Diese Überlegung macht plausibel, warum der Wasserstoffatomradius abnimmt, wenn das H-Atom ein Photon abstrahlt. Mit dieser Energieabgabe ist auch eine Drehimpulsabgabe verknüpft, da ein Photon nicht nur Energie, sondern auch einen Spin besitzt.

3. Berücksichtigung des Eigendrehimpulses des massereichen Zentralkörpers

Das Anwachsen des Abstandes von Mond und Erde kann mit dem in Abschnitt 2 diskutierten Modell nicht erklärt werden. Aus diesem Grund erweitern wir das Modell um die folgenden Annahmen:

- Der massenreiche Zentralkörper 1 erhält ein Massenträgheitsmoment Θ mit dem Spin (Eigendrehimpuls) $\vec{S}$. Für den Betrag des Spins gilt
  $$S = \Theta\omega_S \tag{10}$$
  (ω_S: Winkelgeschwindigkeit, mit der sich Körper 1 um seine Symmetrieachse dreht).
- Dieser Spin $\vec{S}$ ist parallel zum Bahndrehimpuls $\vec{L}$ von Körper 2 ausgerichtet.
- Auf das System wirken keine äußeren Drehmomente, d.h. der Gesamtdrehimpuls
  $$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S} \tag{11}$$
  bleibt bei Radius- bzw. Energieänderungen konstant.
- Innere Drehmomente sind parallel bzw. antiparallel zu den Drehimpulsen orientiert, so dass sich Spin von Körper 1 und Bahndrehimpuls von Körper 2 (bei konstantem Gesamtdrehimpuls) nur betragsmäßig ändern.

Die Gln. (6) und (8) müssen daher modifiziert werden. Es gilt nun

$$W = \frac{S^2}{2\Theta} - \frac{C}{2r} \tag{12}$$

und

$$J = S + \sqrt{Cm_2 r}\ . \tag{13}$$

Wird Gl. (13) nach S aufgelöst und in Gl. (12) eingesetzt, folgt

$$W = \frac{\left(J - \sqrt{Cm_2 r}\right)^2}{2\Theta} - \frac{C}{2r}\ . \tag{14}$$

Differentiation von W nach r führt auf die Gleichung

$$\frac{dW}{dr} = \frac{Cm_2 - J\sqrt{\frac{Cm_2}{r}}}{2\Theta} + \frac{C}{2r^2} \tag{15}$$

bzw. bei Berücksichtigung der Gln. (10) und (13)

$$\frac{dW}{dr} = \frac{-\omega_S\sqrt{\frac{Cm_2}{r}}}{2} + \frac{C}{2r^2}\ . \tag{16}$$

Nur wenn

$$J > \frac{\Theta\sqrt{C}}{\sqrt{m_2 r^3}} + \sqrt{Cm_2 r} \tag{17}$$

bzw. nach Berücksichtigung der Gln. (4) und (8)

$$\omega_S > \omega_B \tag{18}$$

erfüllt ist, nimmt mit zunehmendem Abstand r die Gesamtenergie W ab. Hat das System die Möglichkeit, durch Dissipation mechanische Energie abzubauen, so wird es dies so lange tun, bis

$$\omega_S = \omega_B \tag{19}$$

ist. Ist dies erreicht, so spricht man von einer *gebundenen Rotation*[3]. Der Abstand der beiden Körper wird dann nicht weiter anwachsen. Für den dann erreichten Abstand r_{max} gilt die Bestimmungsgleichung

$$J = \frac{\Theta\sqrt{C}}{\sqrt{m_2 r_{max}^3}} + \sqrt{Cm_2 r_{max}}\ , \tag{20}$$

die analytisch nicht gelöst werden kann.

Die Änderung der Gesamtenergie setzt sich zusammen aus der Änderung der Rotationsenergie von Körper 1 und der Änderung der kinetischen und potentiellen Energie von Körper 2. Im Einzelnen gilt bei Berücksichtigung der Gln. (10) und (12) für die Energieänderung von Körper 1 bzw. 2

$$\frac{dW_1}{dr} = \frac{d}{dr}\frac{S^2}{2\Theta} = \frac{S}{\Theta}\frac{dS}{dr} = -\sqrt{\frac{Cm_2}{r}}\frac{\omega_S}{2} \tag{21}$$

bzw.

$$\frac{dW_2}{dr} = \frac{d}{dr}\left(-\frac{C}{2r}\right) = \frac{C}{2r^2} \tag{22}$$

Stets nimmt mit zunehmendem Abstand r die Energie von Körper 1 ab und die von Körper 2 zu. Da mit zunehmendem Abstand r die Energie und damit auch der Spin des Zentralkörpers 1 abnimmt, muss wegen der angenommenen Konstanz von J der Bahndrehimpuls von Körper 2 zunehmen. Es fließt also Drehimpuls von Körper 1 zu Körper 2, während das abgeschlossen Gesamtsystem mechanische Energie durch Dissipation verliert. Für die Drehimpulsänderung von Körper 1 folgt aus Gl. (13)

$$\frac{dS}{dr} = -\sqrt{\frac{Cm_2}{4r}}\ . \tag{23}$$

Diese Gleichung gilt auch, nur mit umgekehrtem Vorzeichen, für den Bahndrehimpuls von Körper 2. Für den Bahndrehimpuls von Körper 2 gilt

$$L = m_2 r^2 \omega_B = J - S\ . \tag{24}$$

Differentiation von Gl. (24) nach r führt mit Gl. (23) auf

$$m_2 2r\omega_B + m_2 r^2\frac{d\omega_B}{dr} = \sqrt{\frac{Cm_2}{4r}} \tag{25}$$

[3] Wir können die Wechselwirkung von Mond und Erde als einen vollkommen unelastischen Drehstoß auffassen, der beendet ist, wenn die Winkelgeschwindigkeiten von Mond und Erde übereinstimmen. Allerdings ist die Stoßzeit astronomisch lang.

Tabelle 1: Einige Daten des Systems Mond-Erde [1, 4]		
	Mond	Erde
Masse	$m_M = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg	$m_E = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ kg
mittlerer Radius	$R_M = 1738$ km	$R_E = 6371$ km
Massenträgheitsmoment[4]	$\Theta_M = 8{,}9 \cdot 10^{34}$ kgm^2	$\Theta_E = 8{,}1 \cdot 10^{37}$ kgm^2
Umdrehungsdauer (Kreisbahn)	$T_{B,M} = 27{,}32$ d	$T_{B,E} = 27{,}32$ d
Umdrehungsdauer (Spin)	$T_{S,M} = 27{,}32$ d	$T_{S,E} = 0{,}9973$ d
Bahndrehimpuls	$L_M = 2{,}9 \cdot 10^{34}$ Js	
Spin	$S_M = 2{,}4 \cdot 10^{29}$ Js	$S_E = 5{,}9 \cdot 10^{33}$ Js
mittlerer Abstand Mond-Erde	$r = 384400$ km	
Gesamtdrehimpuls Mond-Erde	$J = 3{,}5 \cdot 10^{34}$ Js	

bzw. mit Gl. (4) zu

$$\frac{d\omega_B}{dr} = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{C}{m_2 r^5}}\,. \qquad (26)$$

4. Beispiel: Das System Erde-Mond

Wegen

- der geringen Exzentrizität der Mondbahn (e = 0,0549 [1, S. 33])[5]
- der im Vergleich zur Erdmasse geringen Masse des Mondes (siehe Tabelle 1)[6]
- der Kleinheit des Spins des Mondes[7] im Vergleich zu seinem Bahndrehimpuls (siehe Tabelle 1)
- der Tatsache, dass Bahndrehimpuls von Mond und Spin der Erde nahezu parallel sind[8]
- und der Tatsache, dass Mond und Erde ein drehimpulsmäßig nahezu abgeschlossenes System bilden (Einfluss der Sonne wird vernachlässigt)

lässt sich das in Abschnitt 3 diskutierte Modell in guter Näherung auf das System Mond-Erde anwenden (Körper 1: Erde, Körper 2: Mond). Mit

$$C = G\, m_M m_E = 2{,}93 \cdot 10^{37}\ \mathrm{Nm}^2 \qquad (27)$$

($G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ m^{3}kg^{-1}s^{-2}: Gravitationskonstante) und den in Tabelle 1 zusammengefassten Daten berechnet sich für ein Anwachsen des Abstandes Erde-Mond von $\Delta r = 3{,}8$ cm pro Jahr (gemessener Wert [5][9]) die zeitliche Abnahme des Eigendrehimpulses der Erde[10] mit Gl. (23) zu $4{,}5 \cdot 10^{16}$ kgm^{2}s^{-2}. Im gleichen Maße nimmt der Bahndrehimpuls des Mondes zu, damit der Gesamtdrehimpuls des abgeschlossenen Systems Erde-Mond konstant bleibt. Der dazugehörige mechanischen Energieverlust des Gesamtsystems pro Zeiteinheit beträgt laut Gl. (16) $3{,}17 \cdot 10^{12}$ W (Abb.1). Die Rotationsenergie der Erde nimmt pro Sekunde um (Gl. (21)) $3{,}29 \cdot 10^{12}$ J

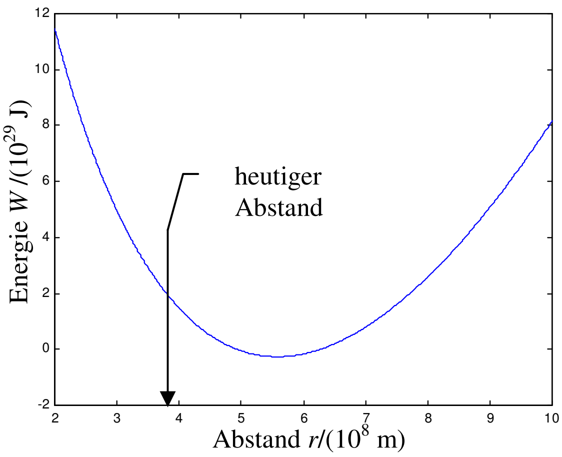

Abb. 1: Darstellung der Gesamtenergie W des Systems Erde-Mond in Abhängigkeit vom Abstand r

[4] Die Berechnung des Massenträgheitsmoments einer homogenen, starren Kugel erfolgt mit der Formel $\Theta = \frac{2}{5} mR^2$ (R: Kugelradius). Wegen der inhomogenen Massenverteilung der Erde rechnen wir mit einem etwa 20 % kleineren Wert [6].

[5] d.h. die Mondbahn ist in guter Näherung eine Kreisbahn.

[6] d.h. die Erde ruht praktisch im Schwerpunkt des Systems Erde-Mond. Auf diese Annahmen kann jedoch verzichtet werden, wenn, mit Ausnahme von Gl. (29), in allem Formeln die Masse des Mondes (m_M) durch die reduzierte Mondmasse ersetzt wird. Die reduzierte Mondmasse berechnet sich mit der Formel

$$m_{M,r} = \frac{m_M m_E}{m_M + m_E} \text{ zu } 7{,}26 \cdot 10^{22} \text{ kg.}$$

[7] Die Rotationsdauer des Mondes ist an seinen Umlauf um die Erde gebunden (gebundene Rotation). Deshalb wendet der Mond der Erde stets dieselbe Seite zu [1, S. 36].

[8] Die Mondbahn ist um etwa 5° gegen die Ekliptik verkippt [7, S. 169]. Der Spinvektor der Erde weicht um etwa 23,5° von der Senkrechten zur Ekliptik ab [7, S. 154]. Spinvektor der Erde und Bahndrehimpulsvektor des Mondes nehmen wegen der Präzessionsbewegung der Mondbahn (18,6-jähriger Zyklus) alle möglichen Winkel zwischen 18,5° und 28,5° an. Dies wird im Weiteren jedoch nicht berücksichtigt.

[9] Die Messungen erfolgen mit Hilfe kurzer Laserpulse (Laufzeitmessung).

[10] Durch den Umlauf des Mondes um die Erde bilden sich zwei Flutberge auf den Weltmeeren aus. Der eine Flutberg befindet sich auf der mondzugewandten, der andere Flutberg auf der gegenüberliegenden Seite der Erde. Da sich die Erde unter diesen Flutbergen dreht, entsteht ein abbremsendes Drehmoment [6].

ab, d.h. knapp 4 % [11] des von der rotierenden Erde abfließenden Energiestroms gelangen zum Mond. Der Rest, etwa 96 %, wird im Wesentlichen über die Gezeitenreibung dissipiert.

Die Winkelbeschleunigung der Erde berechnet sich mit Gl. (23) und dem in Tabelle 1 angegebenen Massenträgheitsmoment der Erde zu $\dot{\omega}_{\mathrm{S,E}} = -5{,}6\cdot 10^{-22}\,\mathrm{s}^{-2}$ (gemessen: $-5\cdot 10^{-22}\,\mathrm{s}^{-2}$ [6], $-3{,}7\cdot 10^{-22}\,\mathrm{s}^{-2}$ [8][12]). Das bedeutet eine tägliche Zunahme der Umdrehungsdauer[13] $T_{\mathrm{S,E}}$ der Erde von

$$\Delta T_{\mathrm{S,E}} = -\frac{\dot{\omega}_{\mathrm{S,E}} T_{\mathrm{S,E}}^3}{2\pi} = 57\ \mathrm{ns}. \tag{28}$$

Aber auch die Umdrehungsdauer des Mondes ändert sich. Es gilt (Gl. (26)) $\dot{\omega}_{\mathrm{B,M}} = -1{,}2\cdot 10^{-23}\,\mathrm{s}^{-2}$ (gemessen: $-1{,}2\cdot 10^{-23}\,\mathrm{s}^{-2}$ [6]). Jeder (siderische) Mondmonat ist daher um

$$\Delta T_{\mathrm{B,M}} = -\frac{\dot{\omega}_{\mathrm{B,M}} T_{\mathrm{B,M}}^3}{2\pi} = 26\ \mu\mathrm{s} \tag{29}$$

länger als sein Vorgänger.
Erde und Mond können sich nicht beliebig weit von einander entfernen. Wegen

$$\begin{aligned} \Theta_{\mathrm{E}} &= 8{,}1\cdot 10^{37}\ \mathrm{kgm}^2 \\ &\ll m_{\mathrm{M}} r^2 = 1{,}2\cdot 10^{40}\ \mathrm{kgm}^2 \end{aligned} \tag{30}$$

darf in Gl. (20) der erste Summand auf der rechten Seite vernachlässigt werden. Deshalb kann Gl. (20) nach $r_{\max}$ aufgelöst werden:

$$r_{\max} = \frac{J^2}{C m_{\mathrm{M}}} = 5{,}7\cdot 10^5\ \mathrm{km}\ . \tag{31}$$

Die gemeinsame Winkelgeschwindigkeit von Mond und Erde bei maximalem Abstand berechnet sich mit Gl. (4) zu

$$\omega_{\mathrm{S,E}} = \omega_{\mathrm{B,M}} = \sqrt{\frac{C}{m_{\mathrm{M}} r_{\max}^3}} = 1{,}5\cdot 10^{-6}\ \mathrm{s}^{-1}\ . \tag{32}$$

Das bedeutet für beide Körper eine Umdrehungsdauer von knapp 49 Tagen[14].

5. Zusammenfassung

Sendet ein H-Atom ein Photon aus, so gibt es Energie und Drehimpuls ab. Damit verknüpft ist ein Abnahme des Elektronenbahnradius.
Analog zum H-Atom umkreist der Mond die Erde. Wegen der Gezeitenreibung verliert das Gesamtsystem mechanische Energie. Im Gegensatz zum H-Atom bleibt der Gesamtdrehimpuls dabei konstant, weshalb der Abstand Erde-Mond anwachsen muss. Mit dem Anwachsen des Abstandes fließt Drehimpuls von der Erde zum Mond. Dabei verliert die um ihre eigene Achse rotierende Erde Energie. Diese Energie wird zu 96 % durch Gezeitenreibung dissipiert. Die restlichen 4 % fließen zum Mond und erhöht dessen Energie. Dies geschieht noch so lange, bis der Abstand Erde-Mond auf $5{,}7\cdot 10^5$ km angewachsen sein wird. Dann haben sich die Umdrehungsdauern von Erde (Spin) und Mond (Umlauf um Erde) angeglichen und betragen jeweils 49 Tage.

Literatur

[1] Weigert, A. & Wendker, J. (1989): Astronomie und Astrophysik – ein Grundkurs. Weinheim: VHC Verlagsgesellschaft.
[2] Hellwege, K.H. (1974): Einführung in die Physik der Atome. Berlin: Springer, S. 17
[3] Fischler, H. (Hrsg.) (1992): Quantenphysik in der Schule. Kiel: Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften, S. 75
[4] Engelmann, L. et. al. (1996): Formeln und Tabellen für die Sekundarstufe I und II. Berlin: Paedec Gesellschaft für Bildung und Technik, S. 94-95
[5] Dickey, J. O. & Bender, P.L. & Faller, J. E. et. al. (1994): Lunar laser ranging: A continuing legacy of the Apollo program. Science 265, S. 482-490
[6] Brosche, P. (1989): Die Abbremsung der Erdrotation. Physik in unserer Zeit, Vol. 20, No. 3, S. 70-78
[7] Snow, Th. P. & Brownsberger, K.R. (1997): Universe, Origins and Evolution. Belmont: Wadsworth Publishing Company.
[8] Pertsev, B.P. (2000): On Secular Deceleration of the Earth's Rotation. Izvestiya: Physics of the Solid Earth, Vol. 36, No. 3, S. 218 – 222.

[11] $\dfrac{3{,}36\cdot 10^{12}\,\mathrm{J} - 3{,}24\cdot 10^{12}\,\mathrm{J}}{3{,}36\cdot 10^{12}\,\mathrm{J}} = 0{,}036$

[12] Dies sind über etwa 2000 Jahre bzw. 300 Jahre gemittelte Werte. Man beachte, dass es eine ganze Reihe weiterer Faktoren gibt, die die Rotationsdauer beeinflussen (z.B. jahreszeitliche Veränderungen des Trägheitsmoments der Erde).

[13] Es gilt der Zusammenhang: $T = 2\pi/\omega$.

[14] d.h. ein astronomischer Tag und ein astronomischer Mondmonat sind dann etwa 49-mal so lang wie ein heutiger Tag.