

Die Laserbilanzgleichungen

von

Axel Donges

erschieden in: Praxis der Naturwissenschaften - Physik in der Schule 3/53 (2004), S. 42-46

Zusammenfassung

Es werden für ein vereinfachtes System die Laserbilanzgleichungen aufgestellt und für den stationären Fall gelöst. Es zeigt sich, dass Laserbetrieb erst nach Überschreiten einer Schwellpumprate einsetzt. Ist die Laserschwelle überschritten, wächst die Laserleistung linear mit der Pumprate an. Nach dem Einschalten einer konstanten Pumprate werden erst nach Abklingen der Relaxationsschwingungen die stationären Lösungen angenommen.

1. Einleitung

In einem Laserresonator spielen zwei Arten von Energie eine wichtige Rolle: Die Anregungsenergie des laseraktiven Mediums (z.B. der Ne-Atome beim HeNe-Laser) und die Energie des sich im Resonator aufbauenden Strahlungsfeldes. Zwischen beiden Energieformen besteht eine enge Wechselwirkung, die durch die sogenannten Laserbilanzgleichungen [1, 2] beschrieben wird. Bei den Laserbilanzgleichungen handelt es sich um ein nichtlineares, gekoppeltes Differenzialgleichungssystem, mit dem die zeitliche Entwicklungen des Strahlungsfeldes und der Besetzung der beiden Laserniveaus des laseraktiven Medium berechnet werden können. Im stationären Fall vereinfachen sich die Bilanzgleichungen zu einem nichtlinearen, gekoppelten Gleichungssystem, das in der Schule behandelt werden kann. Mit den stationären Gleichungen lassen sich die Anschwingbedingung von Lasern (Laserschwelle) und deren Ausgangsleistung in Abhängigkeit von der Pumprate berechnen. Die zeitabhängigen Bilanzgleichungen, die nur numerisch gelöst werden können, beschreiben das Einschwingverhalten von Lasern.

2. Aufstellen der Bilanzgleichungen

Wir betrachten einen Laser, bei dem nur eine Mode angeregt sein soll. Das Licht dieses Lasers entsteht bei atomaren Übergängen zwischen dem oberen und dem unteren Laserniveau des laseraktiven Mediums. Durch sogenanntes Pumpen werden ständig Atome (bzw. Moleküle) aus dem Grundzustand über ein Zwischenniveau in das obere Laserniveau angeregt. Die

Zahl der Atome, die so pro Zeiteinheit in das obere Laserniveau befördert werden, heißt Pumprate (P). Neben diesem Gewinn gibt es auch Verluste, die die Zahl N_o der Atome, die sich im oberen Laserniveau befinden, abnehmen lässt. Der wesentliche Verlustprozess ist bei einem Laser die induzierte Emission. Die Zahl der induzierten Emissionen pro Zeiteinheit ist proportional zu dem Produkt aus der Photonendichte $\frac{Q}{V}$ (Q : Zahl der Photonen im Laserresonator aufhalten, V : Volumen des Laserresonators, das gleichmäßig mit verstärkendem Medium ausgefüllt sein soll) und der Differenz der Anzahl der Atome im oberen und unteren Laserniveau. Zur Vereinfachung wird im Weiteren angenommen, dass das untere, thermisch nicht besetzten Laserniveaus extrem schnell in den Grundzustand relaxiert. Die Anzahl der Atome, die sich im unteren Laserniveau befinden, beträgt daher stets Null ($N_u = 0$). Für diesen Spezialfall vereinfacht sich die Rate der induzierten Emissionsverluste zu $-BN_o \frac{Q}{V}$. B ist eine laserspezifische Konstante, die wir als Einsteinkoeffizient der induzierten Emission bezeichnen. Neben den Verlusten durch induzierte Emission gibt es weitere Verluste für das obere Laserniveau, die durch spontane Emissionen bedingt werden. Für die entsprechende Rate gilt $-\frac{N_o}{\tau_o}$ (τ_o : Lebensdauer des oberen Laserniveaus). Die Bilanzgleichung für die zeitliche Entwicklung der Anzahl der Atome im oberen Laserniveau lautet somit

$$\frac{dN_o}{dt} = P - BN_o \frac{Q}{V} - \frac{N_o}{\tau_o} . \quad (1)$$

Die Zahl der Photonen im Laserresonator, Q , nimmt durch induzierte Emission zu. Pro Zeiteinheit entstehen genauso viele Photonen, wie Atome im oberen Laserniveau durch induzierte Emission verloren gehen. Außerdem verlassen ständig Photonen den Resonator. Beträgt die mittlere Lebensdauer der Photonen im passiven Resonator τ_R ¹, so verlassen pro Zeiteinheit $\frac{Q}{\tau_R}$ Photonen den Resonator. Für die Photonenbilanz bedeutet dies

¹ Wir gehen davon aus, dass die Resonatorverluste nur durch Auskoppelverluste an dem Auskoppelspiegel des Laserresonators zustande kommen. Die mittlere Lebensdauer eines Photons im passiven Resonator (d.h. Resonator ohne verstärkendes Medium) lässt sich dann mit der Gleichung $\tau_R = \frac{2L}{c(1-R)}$ berechnen [3, S. 62-63]. Hierbei ist R der Reflexionsfaktor des Aus-

$$\frac{dQ}{dt} = BN_o \frac{Q}{V} - \frac{Q}{\tau_R} . \quad (2)$$

In dieser Bilanzgleichung tauchen Gewinne durch die tatsächlich vorhandenen spontanen Emissionen nicht auf. Der Grund dafür ist, dass die spontanen Photonen räumlich isotrop emittiert werden und zu dem gerichteten Laserstrahl praktisch nicht beitragen und deshalb in (2) vernachlässigt werden. Die Gleichungen (1) und (2) bilden (wegen des Terms $\propto N_o Q$) ein nichtlineares, gekoppeltes Differenzialgleichungssystem, das i.Allg. nur numerische gelöst werden kann.

3. Lösung der Bilanzgleichungen für den stationären Fall

3.1 Bestimmung der Laserschwelle und der Laserleistung

Wir diskutieren im Weiteren zur Vereinfachung nur den stationären Fall $\left(\frac{dN_o}{dt} = \frac{dQ}{dt} = 0 \right)$,

weshalb sich die Bilanzgleichungen (1) und (2) zu

$$P - BN_o \frac{Q}{V} - \frac{N_o}{\tau_o} = 0 \quad (3)$$

$$BN_o \frac{Q}{V} - \frac{Q}{\tau_R} = Q \left(\frac{B}{V} N_o - \frac{1}{\tau_R} \right) = 0 \quad (4)$$

vereinfachen. Die beiden Lösungen von (4) sind

$$Q_1 = 0 \quad (5)$$

und

$$N_{o,2} = \frac{V}{B\tau_R} . \quad (6)$$

Einsetzen der Lösungen (5) und (6) in (3) liefert

$$N_{o,1} = P\tau_o \quad (\text{falls } Q_1 = 0) \quad (7)$$

und

koppelspiegels. Der Reflexionsfaktor des zweiten Resonatorspiegels wurde zu 1 angenommen.

$$Q_2 = P\tau_R - \frac{V}{B\tau_o} \quad (\text{falls } N_{o,2} = \frac{V}{B\tau_R}) \quad (8)$$

Mit Lösung (8) berechnen sich für $P < P_{Sch}$

$$P_{Sch} = \frac{V}{B\tau_o\tau_R} \quad (9)$$

negative Werte für die Photonenzahl Q . Dies ist aus physikalischen Gründen auszuschließen. Die Lösungen (6) und (8) gelten daher nur für $P \geq P_{Sch}$. P_{Sch} wird als Schwellpumprate bezeichnet, da Werte $Q > 0$ nur für $P > P_{Sch}$ erzielt werden. Über der Schwelle ($P > P_{Sch}$) sind die Lösungen (5) und (7) auszuschließen, da diese Lösungen auf Grund der in (2) bzw. (4) vernachlässigten spontanen Emission instabil sind: Spontan emittierte Photonen, die zufälligerweise in Richtung der Resonatorachse emittiert werden, bewirken das Anschwingen des Lasers und verhindern so die Lösung (5).

Zusammenfassend können wir feststellen: Unterhalb der Laserschwelle ($P < P_{Sch}$) liefern die stationären Laserbilanzgleichungen die Lösungen

$$Q = 0 \quad \text{und} \quad N_o = P\tau_o \quad (P < P_{Sch}). \quad (10)$$

Die Besetzungszahl des oberen Laserniveaus wächst linear mit der Pumprate P an, während die Zahl der Photonen im Resonator und damit auch die Laserleistung Null ist. Die Tatsache, dass der Laser aus ist ($Q = 0$), obwohl ständig Atome an- und damit auch abgeregt werden, lässt sich mit der spontanen Emission erklären. Das Lasermedium (z.B. die Ne-Atome in der Gasentladungsröhre beim HeNe-Laser) wirkt unterhalb der Schwellpumprate wie eine gewöhnliche Lichtquelle, die isotrop Licht abstrahlt. Sobald die Laserschwelle überschritten wird ($P > P_{Sch}$), ändert sich das Verhalten schlagartig. Das System arbeitet nun als Laser und die Zahl der kohärenten Photonen im Resonator wächst linear mit der Pumprate an. Die Zahl der pro Zeiteinheit aus dem Laser austretenden Photonen ($\frac{Q}{\tau_R}$) bestimmt die Laserleistung P_L .

$$P_L = hf_L \frac{Q}{\tau_R} \quad (11)$$

(hf_L : Energie eines Photons, das der Laser abstrahlt). Für die Laserleistung und die Anzahl- dichte der Atome im oberen Laserniveaus gilt daher

$$P_L = hf_L(P - P_{Sch}) \quad \text{und} \quad \frac{N_o}{V} = \frac{1}{B\tau_R} \quad (P > P_{Sch}) \quad (12)$$

(Bild 1). Die Laserleistung wächst linear mit der Pumprate an. Dabei bleibt die Besetzungsdichte des oberen Laserniveaus konstant. Dies ist möglich, da mit zunehmender Photonen-dichte die Verlustrate infolge induzierter Emissionen ebenfalls anwächst.

3.2 Experimentelle Aufnahme einer Diodenlaser-Kennlinie

Mit einem Diodenlaser lässt sich auf einfache Weise die Existenz der Laserschwelle und das lineare Anwachsen der Laserleistung mit der Pumprate experimentell nachweisen². Dazu wird bei einem Diodenlaser der Pumpstrom schrittweise erhöht und die Ausgangsleistung beispielsweise mit einer Photodiode gemessen. Bild 2 zeigt eine Laserdioden-Kennlinie. Es ist klar zu erkennen, dass unterhalb eines (temperaturabhängigen) Schwellenstroms I_{Sch} die Ausgangsleistung sehr gering ist. Die Laserdiode verhält sich ähnlich wie eine LED, deren Licht überwiegend durch spontane Emission entsteht. Wird der Schwellenstrom überschritten, nimmt die Ausgangsleistung stark mit dem Pumpstrom zu. Außerdem ist die Strahlung dann viel stärker gerichtet und ihre spektrale Bandbreite geringer.

4. Zeitabhängiges Verhalten

4.1 Relaxationsschwingung beim Einschalten

Bisher haben wir uns mit den zeitunabhängigen Lösungen der Bilanzgleichungen (1) und (2) beschäftigt, bei denen sich das Strahlungsfeld und die Besetzung des oberen Laserniveaus im Gleichgewicht befinden. Abschließend soll noch kurz auf zeitabhängige Lösungen eingegangen werden. Analytische Lösungen der Bilanzgleichungen (1) und (2) sind nicht bekannt. Man ist daher auf numerische Lösungsverfahren angewiesen³. Für die numerische Behandlung erweist sich eine normierte Darstellung der Bilanzgleichungen als günstig. Die Zahl der angelegten Atome N_o und die Photonenzahl Q werden dabei auf die bereits in Abschnitt 3 be-

² LASER-Lehrsysteme, mit denen u.a. auch die Kennlinie eines Diodenlasers aufgenommen werden kann, vertreiben z.B. die Firmen MEOS GmbH, Hartheimer Str. 15, 79427 Eschbach oder PHYWE SYSTEME GmbH, Robert-Bosch-Breite 10, 37070 Göttingen.

³ Das Lösen der zeitabhängigen Bilanzgleichung (1) und (2) ist eine interessante Aufgabe für eine Informatik-AG oder einen Physik- oder Mathematik-Leistungskurs, wenn entsprechende Informatikkenntnisse vorliegen.

rechneten stationären Werte (6) und (8) und die Pumprate P auf den Schwellenwert (9) bezogen werden. In der normierten Darstellung lauten die Bilanzgleichungen

$$\frac{dn_o}{dt} = \frac{p - (p-1)n_o q - n_o}{\tau_2} \quad (13)$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{q(n_o - 1)}{\tau_R} . \quad (14)$$

Hierbei bedeuten

$$n_0 = \frac{N_o}{N_{o,stat.}} \quad (15)$$

$$q = \frac{Q}{Q_{stat.}} \quad (16)$$

$$p = \frac{P}{P_{Sch}} \quad (17)$$

($N_{o,stat.}$ und $Q_{stat.}$ kennzeichnen die Lösungen im stationären Fall).

Bild 3 zeigt das Ergebnis einer numerischen Lösung der Bilanzgleichungen (13) und (14) für den Fall, dass zur Zeit $t = 0$ eine konstante Pumprate P

$$P = 0 \text{ für } t < 0 \text{ und } P = \text{const.} > P \text{ für } t \geq 0 \quad (18)$$

eingeschaltet wird. Unmittelbar nach dem Einschalten des Lasers wächst die normierte Anzahl n_o der Atome im oberen Laserniveau auf einen relativ hohen Wert an. Wegen des zunächst noch fehlenden Strahlungsfeldes ($q \approx 0$) liegt dieser Wert über dem Wert im stationären Laserbetrieb ($n_o = 1$). Sobald $n_o > 1$ ist, wächst nach Gleichung (14) die normierte Zahl der Photonen q an, sofern $q \neq 0$ ist (die nötigen Startphotonen liefert die in (2) bzw. (14) vernachlässigte spontane Emission⁴). Im Laserresonator baut sich so ein Strahlungsfeld auf, das die hohe Besetzung des oberen Laserniveaus wieder unter den Schwellenwert ($n_o = 1$) sinken lässt. Das Strahlungsfeld bricht daraufhin zusammen und die Zahl n_o beginnt wieder zu wachsen. q (und damit auch die Laserleistung) und n_o pendeln sich schließlich auf die stationären Lösungen ($q = n_o = 1$) ein (Relaxationsschwingung).

4.2 Linearisierung der Bilanzgleichungen

Um die Relaxationsschwingungen eines Lasers genauer zu untersuchen, werden die Substitutionen

$$n_o = 1 + \Delta n_o \quad (19)$$

$$q = 1 + \Delta q \quad (20)$$

durchgeführt. Δn_o und Δq beschreiben die Abweichungen von den stationären und normierten Werten. Die Gleichungen (13) und (14) lauten nun

$$\frac{d\Delta n_o}{dt} = -\frac{(p-1)(\Delta n_o + \Delta q + \Delta n_o \Delta q) + \Delta n_o}{\tau_2} \quad (21)$$

$$\frac{d\Delta q}{dt} = \frac{\Delta n_o + \Delta n_o \Delta q}{\tau_R} \quad (22)$$

Im Fall kleiner Abweichungen vom Gleichgewicht

$$|\Delta n_o| \ll 1 \quad (23)$$

$$|\Delta q| \ll 1 \quad (24)$$

kann der Term $\Delta n_o \Delta q$ in den Gleichungen (21) und (22) vernachlässigt werden. Das Gleichungssystem wird dadurch linearisiert. Es gilt näherungsweise

$$\frac{d\Delta n_o}{dt} = -\frac{p\Delta n_o + (p-1)\Delta q}{\tau_2} \quad (25)$$

$$\frac{d\Delta q}{dt} = \frac{\Delta n_o}{\tau_R} \quad (26)$$

Wird Gleichung (26) nach Δn_o aufgelöst und in Gleichung (25) eingesetzt, so ergibt sich formal die Gleichung eines gedämpften harmonischen Oszillators.

$$\frac{d^2 \Delta q}{dt^2} + \frac{2}{\tau_D} \frac{d\Delta q}{dt} + \omega_0^2 \Delta q = 0 \quad (27)$$

Hierbei sind

⁴ Diese Startphotonen müssen bei der numerischen Behandlung des Gleichungssystems (13) und (14) bei den Anfangsbedingungen berücksichtigt werden (z.B. $n_o(t=0) = 0$ und $q(t=0) = 10^{-10} \neq 0$).

$$\tau_D = \frac{2\tau_2}{p} \quad (28)$$

die Dämpfungszeitkonstante und

$$\omega_0^2 = \frac{p-1}{\tau_R\tau_2} \quad (29)$$

das Quadrat der Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Oszillators. Gleichung (27) beschreibt, wie sich die Zahl der Photonen im Resonator dem stationären Wert nähert (Voraussetzung: $|\Delta q| \ll 1$). Der Schwingfall liegt vor, wenn

$$\omega_0\tau_D > 1 \quad (30)$$

bzw.

$$\tau_2 > \frac{p^2\tau_R}{4(p-1)} \quad (31)$$

erfüllt ist. Bei

$$\tau_2 \leq \frac{p^2\tau_R}{4(p-1)} \quad (32)$$

(aperiodischer Fall) treten keine Relaxationsschwingungen mehr auf. Die Photonenzahl q nähert sich langsam dem stationären Endwert.

In Bild 4 ist für verschiedene Werte von τ_2 die zeitliche Entwicklung der normierten Photonenzahl dargestellt. Bei der numerischen Berechnung wurden die Resonatorzeitkonstante τ_R und die normierte Pumprate p konstant gehalten. Es ist deutlich zu erkennen, dass mit zunehmender Lebensdauer τ_2 des oberen Laserniveaus (p und τ_R konstant) die Relaxationsschwingung immer deutlicher hervortritt und die Relaxationsfrequenz abnimmt. Besonders im Fall

$$\tau_2 \gg \frac{p^2\tau_R}{4(p-1)} \quad (33)$$

treten zu Beginn des Einschwingvorgangs nichtlineare Schwingungen auf. Die normierte Photonenzahl q wächst in relativ kurzen Zeiten auf sehr große Werte an, um anschließend wieder auf sehr kleine Werte ($q \approx 0$) abzusinken. Den gleichen Zeitverlauf zeigt die Ausgangsleistung des Lasers. Man bezeichnet dieses Emissionsverhalten als Spiking. Das Spiking tritt bevorzugt bei Festkörperlasern auf (Bild 5).

Bildunterschriften

Bild 1: Anzahldichte der Atome, die sich im oberen Laserzustand befinden (oberes Bild) und Laserleistung (unteres Bild) in Abhängigkeit der Pumprate P

Bild 2: Diodenlaser-Kennlinie: verstärkte Photodiodenspannung U_{ph} in Abhängigkeit vom Pumpstrom I_{Pump} bei drei verschiedenen Temperaturen (Aufnahme: Physik-Praktikum NTA Isny)

Bild 3: Relaxationsschwingung eines Lasers beim Einschalten einer konstanten Pumprate ($p = 6$; $\tau_R = 200$ ns; $\tau_2 = 3,6$ μ s). a) zeitlicher Verlauf der normierten Anzahl q der Photonen im Resonator, b) zeitlicher Verlauf der normierten Anzahl n_o der angeregten Atome

Bild 4: Zeitverlauf der normierten Photonenzahl q beim Einschalten einer konstanten normierten Pumprate ($p = 6$, $\tau_R = 200$ ns)

Bild 5: Experimentell bestimmter Verlauf der Laserausgangsleistung kurz nach dem Einschalten eines Nd-YAG Lasers. Die maximale Leistung (1. Spike) beträgt 6 kW.

Literatur

[1] W. Kleen, R. Müller: Laser. Verstärkung durch induzierte Emission, Sender optischer Strahlung hoher Kohärenz und Leistungsdichte. Berlin: Springer (1969), S. 96-100

[2] W. Lange: Einführung in die Laserphysik. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft (1983), S. 71-103

[3] A. Donges: Physikalische Grundlagen der Lasertechnik. Heidelberg: Hüthig (2000)

Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr. Axel Donges

Fachhochschule und Berufskollegs NTA Prof. Dr. Grübler gGmbH

Seidenstraße 12-35

D-88316 Isny im Allgäu

eMail: ADonges@web.de

Bild 1

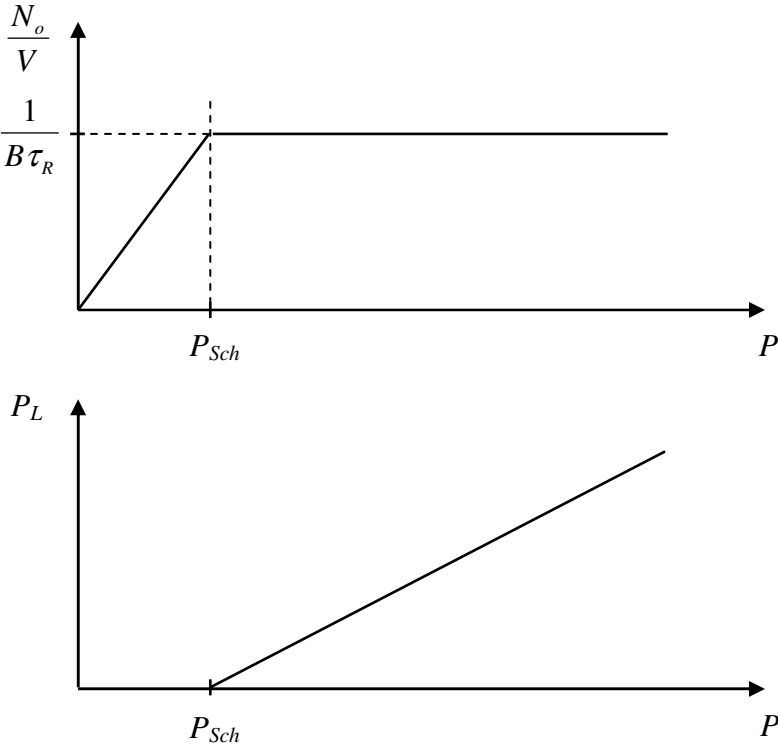


Bild 2:

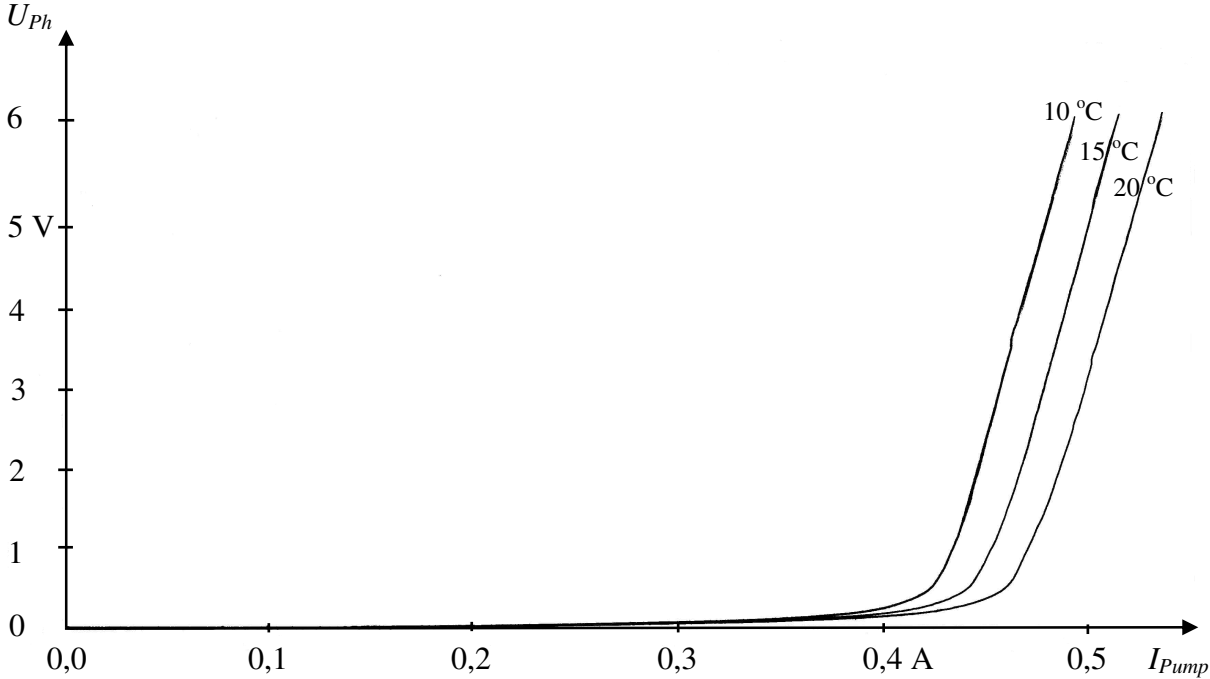


Bild 3

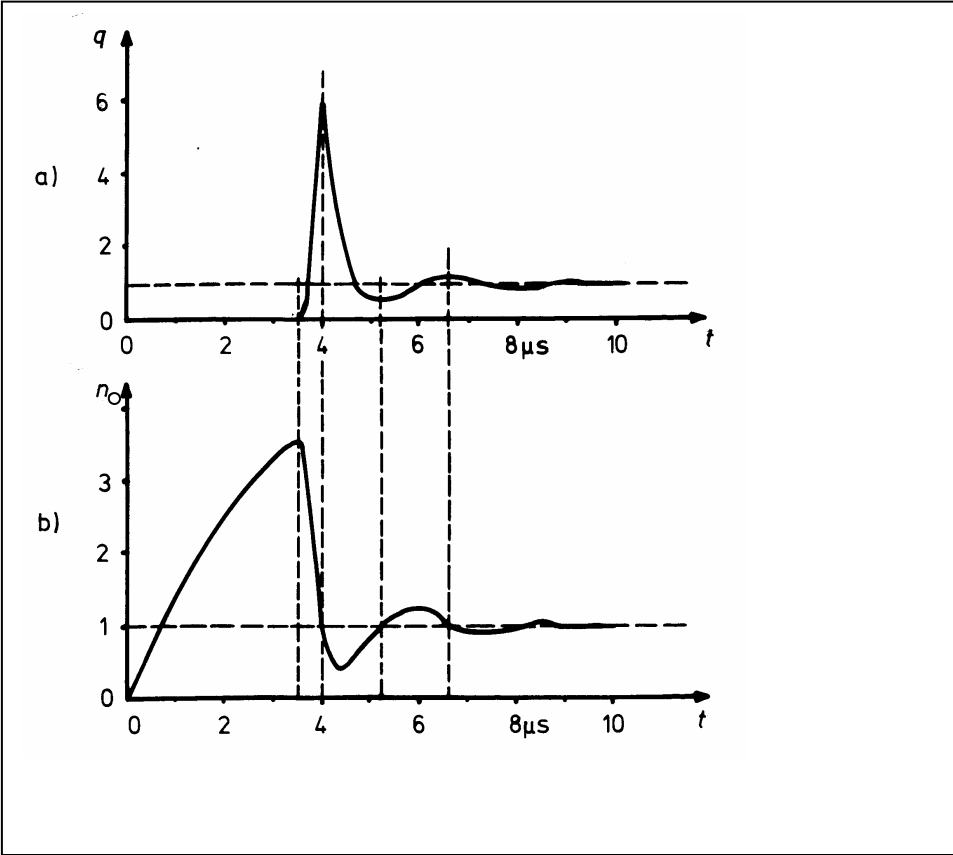


Bild 4:

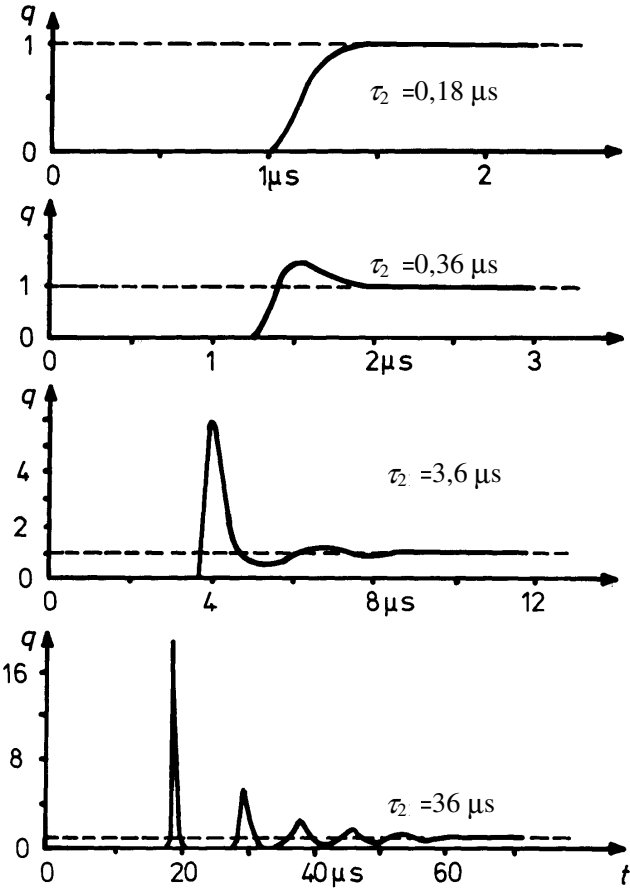


Bild 5:

