

Anmerkungen zum Kreispendel

von

Axel Donges

Fachhochschule und Berufskollegs NTA Prof. Dr. Grübler gGmbH
Seidenstraße 12-35, 88316 Isny im Allgäu, E-mail: AD@fh-isny.de

erschienen in

Praxis der Naturwissenschaften – Physik in der Schule 4/54 (2005) S. 44-46

Zusammenfassung

Ein in der Schule häufig behandeltes System ist das Kreispendel. Der Zusammenhang zwischen der Winkelgeschwindigkeit und dem Auslenkwinkel des rotierenden Kreispendels wird hergeleitet. Es wird die Stabilität der verschiedenen Lösungen diskutiert.

1. Problemstellung

Bei der Behandlung der Zentrifugalkraft im Unterricht werden oft Aufgaben von folgendem Typ behandelt (siehe z.B. [1]): „Stößt man ein Fadenpendel (Masse m , Länge L) so an, dass sich das Pendel mit der Winkelgeschwindigkeit ω_R auf einem Kreis bewegt (siehe Abb. 1), wobei Pendelfaden und Drehachse den Winkel θ bilden, so gehört zu jeder Winkelgeschwindigkeit ω_R ein fester Winkel θ . Aufgabe: Zeigen Sie, dass $\cos\theta = \left(\frac{g}{\omega_R^2 L}\right)$ gilt (g : Erdbeschleunigung).“ Bei der Behandlung dieser Aufgabe bleibt oft unerwähnt, dass die angegebene Lösung nur für $\omega_R \geq \sqrt{\frac{g}{L}}$ gilt und dass es weitere Lösungen gibt. In dem vorliegenden Aufsatz werden alle stationären Lösungen des Kreispendels¹ berechnet und die Stabilität der angegebenen Lösungen diskutiert.

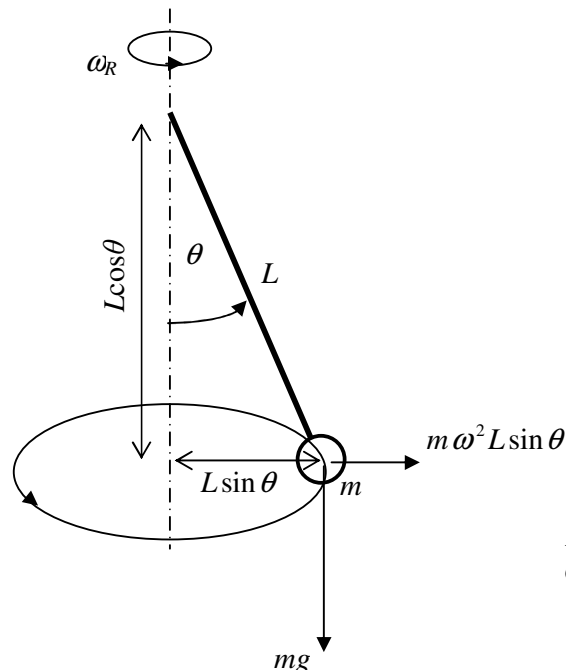


Abb. 1: Schematische Darstellung des Rotationspendels

¹ Das Kreispendel wird auch als *konische Pendel*, *Kegelpendel* oder *Zentrifugalrotator* bezeichnet.

2. Aufstellen der Bewegungsgleichung

Zur Vereinfachung wird im Folgenden angenommen, dass das Kreispendedel aus einem mathematischen Pendel besteht, dessen Aufhängepunkt mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_R rotiert. Die Bewegung des Pendels in θ -Richtung wird bei Vernachlässigung der Reibung durch die Bewegungsgleichung

$$mL^2\ddot{\theta} = -mgL\sin(\theta) + m\omega_R^2L\sin(\theta)L\cos(\theta) \quad (1)$$

beschrieben². Aus (1) folgt nach elementarer Umformung:

$$\ddot{\theta}(\theta) = \omega_0^2 \sin(\theta) \left(\frac{\omega_R^2}{\omega_0^2} \cos(\theta) - 1 \right) \quad (2)$$

Hierbei ist

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad (3)$$

die Kreisfrequenz der Schwingung des nichtrotierenden mathematischen Pendels bei kleinen Auslenkungen.

3. Stationäre Lösungen von (2)

Gleichung (2) ist eine nichtlineare Differenzialgleichung, von der keine analytischen Lösungen bekannt sind. Es lassen sich jedoch mehrere stationäre (d.h. zeitunabhängige) und reelle Lösungen ($\ddot{\theta} = \dot{\theta} = 0$) angeben:

$$\theta_1 = 0 \quad (4)$$

$$\theta_2 = \pi \quad (\text{bzw. } \theta_2 = -\pi, \text{ was jedoch das Gleiche bedeutet}) \quad (5)$$

$$\theta_3 = \arccos\left(\frac{\omega_0^2}{\omega_R^2}\right) \quad \text{für } \omega_R \geq \omega_0 \quad (6)$$

bzw.

$$\theta_{3'} = -\arccos\left(\frac{\omega_0^2}{\omega_R^2}\right) \quad \text{für } \omega_R \geq \omega_0. \quad (6')$$

Für sehr große Kreisfrequenzen $\omega_R \left(\frac{\omega_R}{\omega_0} \rightarrow \infty \right)$ strebt die Lösung (6) bzw. (6') gegen $\frac{\pi}{2}$ bzw.

$-\frac{\pi}{2}$. Lösung (6') spielt keine allzu große Rolle, da wegen der Rotation des Pendels die beiden stationären Lösungen (6) und (6') experimentell nicht unterschieden werden können. Während die Lösungen (4) und (5) für alle Kreisfrequenzen ω_R gelten, gilt Lösung (6) bzw. (6') nur für $\omega_R \geq \omega_0$ (siehe Abb. 2).

² Auf der linken Seite von Gleichung (1) steht das Produkt von Massenträgheitsmoment und Winkelbeschleunigung. Auf der rechten Seite findet man die beiden wirkenden Drehmomente: $-mgL\sin(\theta)$ ist das durch die Schwerkraft und $m\omega_R^2L\sin(\theta)L\cos(\theta)$ das durch die Fliehkraft hervorgerufene Drehmoment.

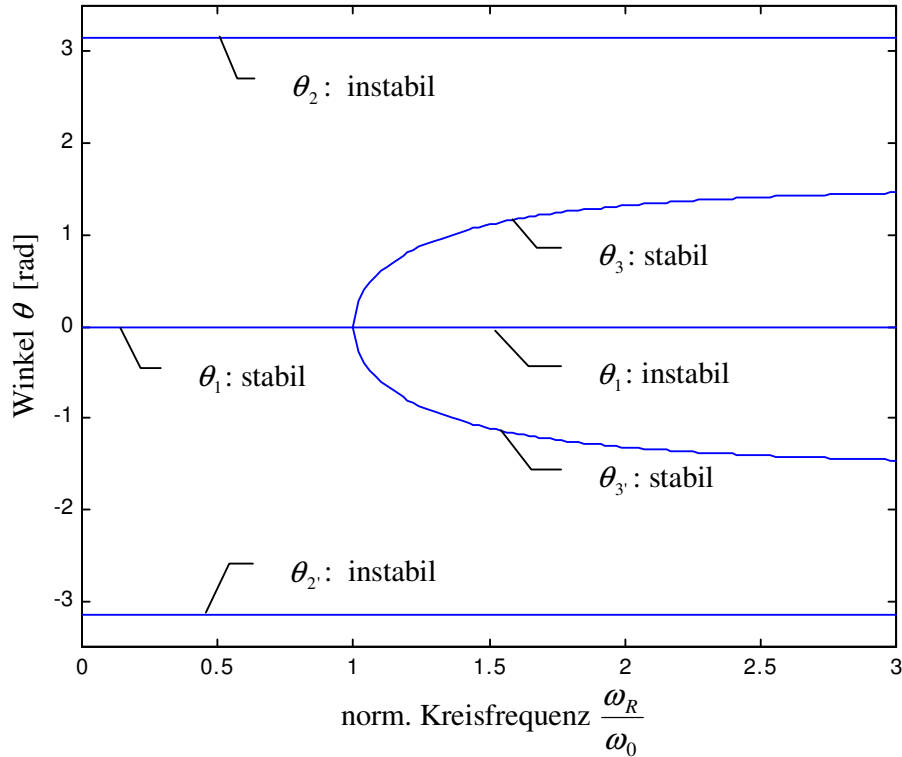


Abb. 2: Stationäre Lösungen von Gleichung (2)

4. Potenzial des Kreispendels

Abbildung 3 zeigt das Schaubild der Funktion (2). Die stationären Lösungen (4)-(6') sind die Nullstellen des Schaubildes. Eine Gleichgewichtslage wird als *stabil* (bzw. *instabil*) bezeichnet, wenn eine kleine Abweichung $\delta\theta$ von der stationären Lösung eine Winkelbeschleunigung $\ddot{\theta}(\theta)$ hervorruft, die das Pendel wieder in die Gleichgewichtslage zurücktreibt (bzw. das Pendel noch weiter aus der Gleichgewichtslage treibt).

$$\text{stabile Lösung: } \delta\theta = \theta - \theta_i \underset{>}{<} 0 \Rightarrow \ddot{\theta}(\theta) \underset{\leq}{\geq} 0 \quad (i = 1, 2, 3, 3') \quad (7)$$

$$\text{instabile Lösung: } \delta\theta = \theta - \theta_i \underset{>}{<} 0 \Rightarrow \ddot{\theta}(\theta) \underset{\geq}{\leq} 0 \quad (i = 1, 2, 3, 3') \quad (8)$$

Eine sehr anschauliche Interpretation der Stabilitätsbedingungen (7)-(8) liefert das Schaubild der Stammfunktion von $-\ddot{\theta}(\theta)$. Die Stammfunktion berechnet sich mit (2) zu

$$V(\theta) = -\int \omega_0^2 \sin(\theta) \left(\frac{\omega_R^2}{\omega_0^2} \cos(\theta) - 1 \right) d\theta = V_0 - \omega_0^2 \left(\cos(\theta) + \frac{1}{2} \frac{\omega_R^2}{\omega_0^2} \sin^2(\theta) \right). \quad (9)$$

Hierbei ist V_0 eine beliebig wählbare Integrationskonstante. Setzen wir willkürlich $V(0) = 0$, so gilt

$$V(\theta) = \omega_0^2 \left(1 - \cos(\theta) - \frac{1}{2} \frac{\omega_R^2}{\omega_0^2} \sin^2(\theta) \right). \quad (10)$$

Wir bezeichnen $V(\theta)$ als Potenzial des Kreispendels.

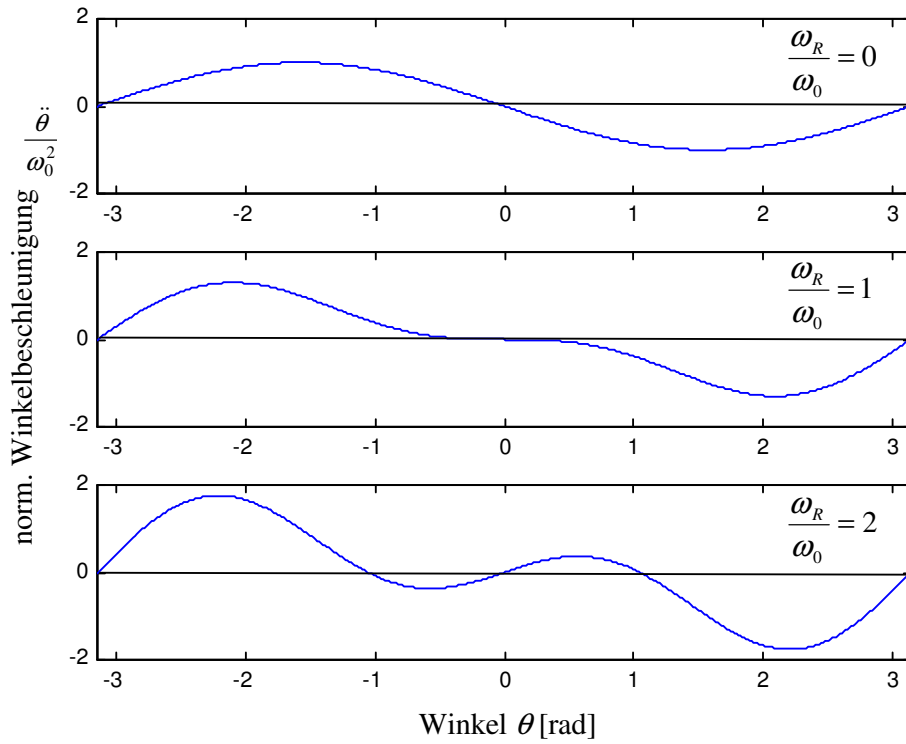


Abb. 3: Darstellung der Funktion $\ddot{\theta}(\theta)$

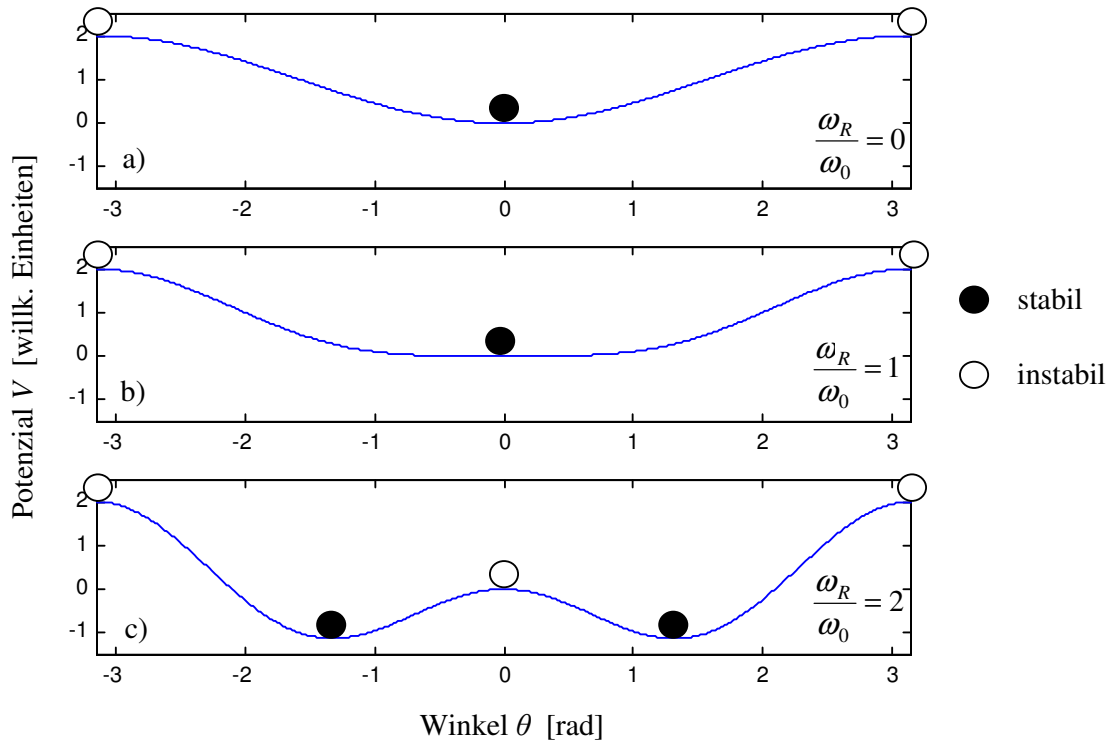


Abb. 4: Veranschaulichung der Stabilität der stationären Lösungen im θ - V -Diagramm

Da $V(\theta)$ durch Integration von $-\ddot{\theta}(\theta)$ entstanden ist, gibt umgekehrt die Tangentensteigung im θ - V -Diagramm die negative Winkelbeschleunigung $-\ddot{\theta}(\theta)$ des Pendels an. Die stationären Lösungen ($\ddot{\theta} = 0$) liegen somit an den θ -Stellen vor, wo das Schaubild der Funktion $V(\theta)$ waagrechte Tangenten besitzt (siehe Abb. 4). Dabei bedeutet wegen den Gleichungen (7) und (8) ein lokaler Tiefpunkt eine stabile und ein lokaler Hochpunkt eine instabile Lösung. Abb. 4 zeigt als Beispiel das Schaubild der Funktion $V(\theta)$ für drei verschiedene Werte des Parameters $\frac{\omega_R}{\omega_0}$.

5. Stabilität der Gleichgewichtslagen (4)-(6')

Die für alle Winkelgeschwindigkeiten ω_R gültigen Gleichgewichtslagen

$$\theta_1 = 0 \tag{4}$$

$$\theta_2 = \pi \tag{5}$$

(Abb. 5) unterscheiden sich bezüglich der Stabilität. Die Gleichgewichtslage (5) ist stets instabil (siehe Abb. 4). Die Gleichgewichtslage (4) ist im Fall $\omega_R \leq \omega_0$ stabil. Lösung (4) wird für $\omega_R > \omega_0$ instabil, was sich im Potenzialverlauf dadurch bemerkbar macht, dass das ursprüngliche Minimum (Abb. 4a) zu einem lokalen Maximum wird und sich links und rechts davon zwei neue Minima bilden (Abb. 4c). Diese Minima sind für die Existenz der beiden stabilen Lösungen (6) und (6') verantwortlich:

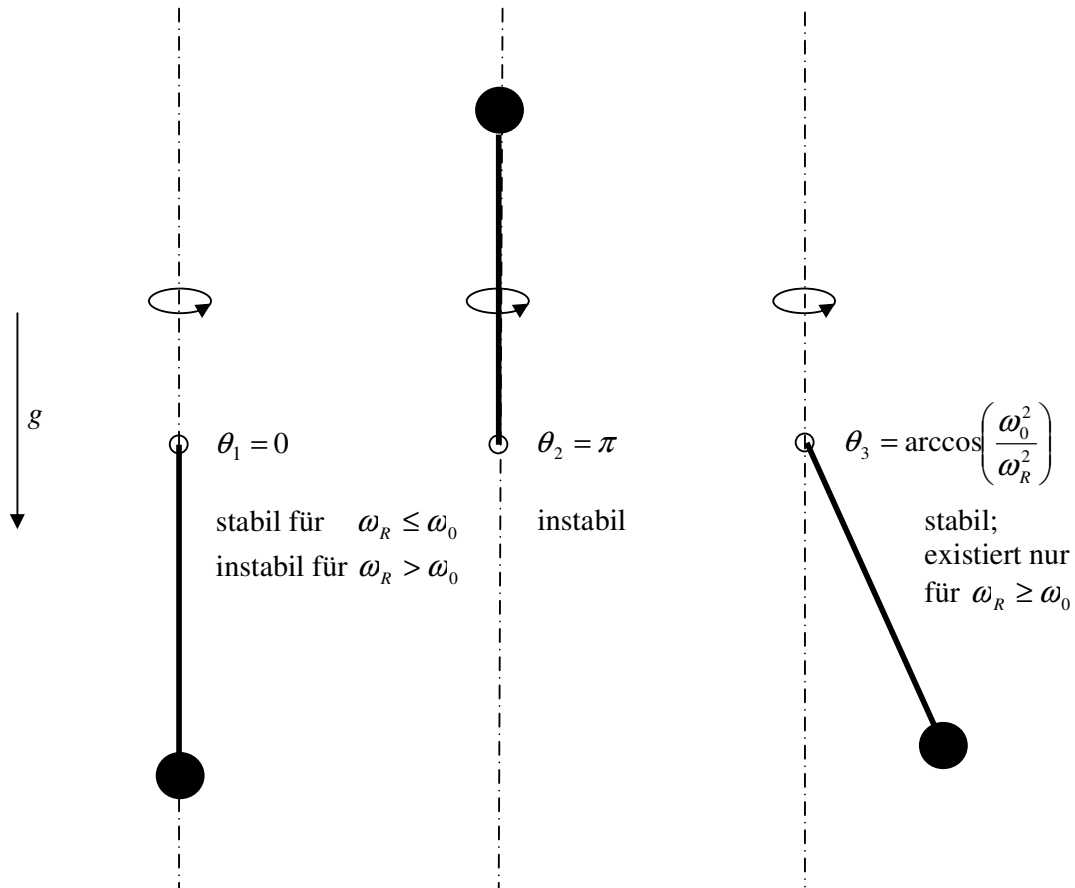


Abb. 5: Die Gleichgewichtslagen des Kreispendels

$$\theta_3 = \arccos\left(\frac{\omega_0^2}{\omega_R^2}\right) \quad (\omega_R \geq \omega_0) \quad (6)$$

$$\theta_{3'} = -\arccos\left(\frac{\omega_0^2}{\omega_R^2}\right) \quad (\omega_R \geq \omega_0). \quad (6')$$

Der Wechsel der Stabilität von Lösung (4) bei $\omega_R = \omega_0$ und die Existenz zweier weiterer stabiler Lösungen für $\omega_R > \omega_0$ wird als *überkritische Heugabel-Bifurkation*³ [z.B. 2] bezeichnet (siehe Abb. 2).

Experimentell lassen sich bei einem Kreispendedel nur die stabilen Lösungen beobachten: Befindet sich das Kreispendedel im Fall $\omega_R \leq \omega_0$ im stabilen Zustand (4) und wird die Kreisfrequenz ω_R gesteigert auf $\omega_R > \omega_0$, so bleibt es dem Zufall überlassen, welche der beiden stabilen Lösungen, (6) oder (6'), angenommen wird. Beim Übergang von der im Fall $\omega_R > \omega_0$ instabilen Lösung (4) in eine der beiden Lösungen (6) oder (6') findet ein sogenannter *Symmetriebruch* statt (siehe Abb. 4), d.h. das System muss sich für eines der beiden Minima in Abb. 4c entscheiden. Praktisch spielt der Unterschied zwischen (6) und (6') keine Rolle, da wegen der Rotation des Kreispendedel experimentell nicht zwischen den beiden stabilen Lösungen (6) und (6') unterschieden werden kann.

Literatur

- [1] J. Grehn (Hsg.): Metzler Physik, 2. Auflage. Stuttgart: J.B. Metzlersche Verlagsbuchhandlung (1988), S. 44-45
- [2] J. Guckenheimer, P. Holmes: Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields, 3. Auflage. New York: Springer-Verlag (1997), S. 145 und 149-150

³ engl.: supercritical pitchfork bifurcation