Exponentialfunktion im Physikunterricht
- Eine Anmerkung -

von

Axel Donges

erschienen in: Der mathematisch-naturwissenschaftliche Unterricht

8/59 (2006), S. 502-503

1. Einleitung

Viele Zerfalls- und Wachstumsprozesse (z.B. radioaktiver Zerfall, Zerfall von Bierschaum, Auf– und Entladekurve eines Kondensators, Zinsrechnung) lassen sich mit Hilfe einer Exponentialfunktion beschreiben. Wir betrachten im Weiteren drei Fälle:

a) exponentielles Wachsen: $N(t) = N_0 \, \mathrm{e}^{t/\tau}$ (1)

b) exponentielles Fallen: $N(t) = N_0 \, \mathrm{e}^{-t/\tau}$ (2)

c) beschränktes Wachsen: $N(t) = N_{\max} \, (1 - \mathrm{e}^{-t/\tau})$. (3)

Hierbei sind N_0 und $N_{\max}$ Konstanten (Anzahl N zur Zeit $t = 0$ bzw. $t \rightarrow \infty$), τ die Zeitkonstante und e die Eulersche Zahl (e ≈ 2,72). Die Zeitkonstante τ gibt die Zeitspanne an, innerhalb der

a) sich die Anzahl N ver-e-facht,

b die Anzahl auf ca. 37 % des Anfangswertes absinkt bzw

c) die Anzahl von $N = 0$ auf ca. 63 % des Endwertes $N_{\max}$ ansteigt.

2. Wechsel der Basis

Oft kann im Physikunterricht nicht auf die Eulersche Zahl e zurückgegriffen werden, da diese im Mathematikunterricht noch nicht bereitgestellt wurde. In diesem Fall ist ein Wechsel zur Basis 2 angezeigt. Die Gleichungen (1)- (3) lauten dann:

a) exponentielles Wachsen: $N(\mathrm{t}) = N_0 \; 2^{\frac{t}{T_{1/2}}}$ (4)

b) exponentielles Fallen: $N(t) = N_0\, 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}}$ (5)

c) beschränktes Wachsen: $N(t) = N_{\max}\,(1 - 2^{-\frac{t}{T_{1/2}}})$. (6)

Für die so genannte Halbwertszeit $T_{1/2}$ und die Zeitkonstante τ gilt der Zusammenhang

$$T_{1/2} = \ln(2)\tau \approx 0{,}69\tau\,. \qquad (7)$$

Die Halbwertszeit ist für Schüler viel einsichtiger. Sie beschreibt die Zeitspanne, innerhalb der

a) sich die Anzahl N verdoppelt,

b) die Anzahl sich halbiert bzw.

c) die Anzahl von $N = 0$ auf die Hälfte des Endwertes $N_{\max}$ ansteigt.

3. Übungsbeispiel

Übungsaufgaben werden meist so einfach, dass man sie im Kopf rechnen kann. Wir berechnen für die drei Fälle die Anzahl N nach 3 Halbwertszeiten:

a) die Anzahl verachtfacht sich: $N = 2^3 N_0 = 8N_0$

b) die Anzahl sinkt auf den achten Teil ab: $N = 2^{-3} N_0 = N_0 / 8$

c) die Anzahl steigt von $N = 0$ auf $\frac{7}{8}N_{\max}$ an: $N = (1 - 2^{-3})N_{\max} = \frac{7}{8}N_{\max}$.

4. Schlusswort

Machen wir es den Schülern so einfach und anschaulich wie möglich. Verwenden wir im Zeitalter des Computers die Basis 2 und den anschaulichen Begriff der Halbwertszeit.