# Wo liegen eigentlich die Maxima beim Doppelspalt?

erschienen in
Praxis der Naturwissenschaften – Physik in der Schule Heft 8/58 (2009)
S. 47 - 48

Axel Donges
Fachhochschule und Berufskollegs *nta* Prof. Dr. Grübler gGmbH, Seidenstraße 12-35,
D-88316 Isny im Allgäu, eMail: **donges@nta-isny.de**

**Kurzfassung**

In den meisten Physiklehrbüchern wird zur Berechnung der Maxima bei Fraunhofer-Beugung am Doppelspalt nur eine Näherungsformel angegeben.

## 1. Einleitung

Die Lage der Intensitätsmaxima bei der Fraunhofer-Beugung am Doppelspalt wird üblicher Weise mit der Gleichung

$$\sin\theta_n = n\cdot\frac{\lambda}{2b} \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n_{\max}) \qquad (1)$$

berechnet [z.B. 1]. Hierbei bedeuten $2b$: Spaltabstand (Mitte-Mitte), $\lambda$: Wellenlänge und $\theta$: Beobachtungswinkel (Abb. 1). $n_{\max}$ ist die größte natürliche Zahl, bei der die Bedingung

$$\left|\sin\theta_{n_{\max}}\right| \le 1 \qquad (2)$$

gerade noch erfüllt ist.

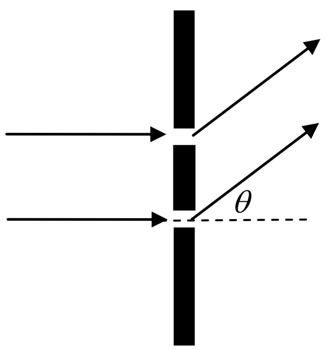


Abb. 1: Zur Beugung am Doppelspalt

## 2. Intensitäsverteilung in Fraunhofer-Näherung

In Fraunhofer-Näherung berechnet sich die normierte Intensitätsverteilung hinter einem Doppelspalt (bei senkrechtem Lichteinfall) zu

$$I(\theta) = I_0 \left( \frac{\sin\alpha}{\alpha} \right)^2 \cos^2\beta \tag{3}$$

mit

$$\alpha = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin\theta \tag{4}$$

und

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda} b \sin\theta \tag{5}$$

[z.B. 2]. Hierbei sind 2*a*: Spaltbreite und $I_0 = I(\theta = 0)$.

## 3. Berechnung der Extrema

Zur Berechnung der Extremstellen wird zunächst Gl. (3) nach $\theta$ abgeleitet

$$\frac{dI}{d\theta} = 2I_0 \frac{\sin\alpha}{\alpha} \frac{\alpha\cos\alpha - \sin\alpha}{\alpha^2} \frac{d\alpha}{d\theta} \cos^2\beta - 2I_0 \left( \frac{\sin\alpha}{\alpha} \right)^2 \cos\beta \sin\beta \frac{d\beta}{d\theta}\,. \tag{6}$$

Nullsetzen von Gl. (6) liefert eine Gleichung zur Bestimmung der Extremstellen von Gl. (3):

$$a \frac{\sin\alpha}{\alpha} \frac{\alpha\cos\alpha - \sin\alpha}{\alpha^2} \cos^2\beta = b \left( \frac{\sin\alpha}{\alpha} \right)^2 \cos\beta \sin\beta\,. \tag{7}$$

Gl. (7) ist erfüllt, wenn

1. Fall: $\cos\beta = 0$, d.h.

$$\beta = \frac{2n+1}{2}\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots..). \tag{8}$$

bzw. mit Gl. (5)

$$\sin\theta = \frac{2n+1}{2} \frac{\lambda}{2b}\,. \tag{9}$$

Dies ist die bekannte Gleichung für die Intensitätsminima des Doppelspalts.

2. Fall: $\cos\beta \neq 0$

In diesem Fall folgt aus Gl. (7) die Bestimmungsgleichung für die Extremstellen der Intensitätsverteilung:

$$\alpha \cot \alpha - 1 = \beta \tan \beta \,. \tag{10}$$

Diese Gleichung lässt sich numerisch oder grafisch lösen.

### 3.1 Grenzfall $a \to 0$

Wegen

$$\lim_{\alpha \to 0} \alpha \cot \alpha = 1 \tag{11}$$

folgt aus Gl. (10) für einen Doppelspalt mit Spalten verschwindender Breite

$$\beta \tan \beta = 0 \,. \tag{12}$$

In diesem Grenzfall liegen die Intensitätsmaxima bei

$$\beta = n\pi \qquad (n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \ldots..). \tag{13}$$

bzw. bei Berücksichtigung von Gl. (5) - in Übereinstimmung mit Gl. (1) - bei

$$\sin \theta = n \frac{\lambda}{2b} \qquad (n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \ldots..,\ \pm\ n_{\max}). \tag{1}$$

### 3.2 Allgemeiner Fall

Wird der Abstand der beiden Spalte $2b$ als Vielfaches der Spaltbreite $2a$ ausgedrückt

$$2b = m \cdot 2a \qquad (m > 1), \tag{14}$$

so folgt aus Gl. (10)

$$\alpha \cot \alpha - 1 = m\alpha \tan(m\alpha) \,. \tag{15}$$

### 3.3 Beispiel: $m = 2$

Wir diskutieren im Weiteren als Beispiel den Fall $m = 2$ (d.h. Spaltabstand gleich doppelte Spaltbreite). Die durch Newton-Iteration gewonnenen ersten neun (gerundeten) Lösungen von

$$\alpha \cot \alpha - 1 = 2\alpha \tan(2\alpha) \tag{16}$$

sind in Tabelle 1 zusammengefasst. Der dazugehörige Intensitätsverlauf ist in Abbildung 2 dargestellt.

Tabelle 1: Numerisch berechnete Lage der Intensitätsmaxima

| Lösung $\alpha$ | $\sin\theta$ $(m=2)$ | $\sin\theta$ $(m\to\infty)$ | Anmerkung |
|---|---|---|---|
| 0 | $0{,}000000\cdot\frac{\lambda}{2b}$ | $0\cdot\frac{\lambda}{2b}$ | Maximum 0. Ordnung |
| $\pm\,1{,}434323$ | $\pm\,0{,}913118\cdot\frac{\lambda}{2b}$ | $\pm\,1\cdot\frac{\lambda}{2b}$ | Maximum $\pm$ 1. Ordnung |
| $\pm\,2{,}696690$ | $\pm\,1{,}716766\cdot\frac{\lambda}{2b}$ | $\pm\,2\cdot\frac{\lambda}{2b}$ | fehlendes Maximum $\pm$ 2. Ordnung |
| $\pm\,3{,}543191$ | $\pm\,2{,}255665\cdot\frac{\lambda}{2b}$ | $\pm\,2\cdot\frac{\lambda}{2b}$ | fehlendes Maximum $\pm$ 2. Ordnung |
| $\pm\,4{,}669648$ | $\pm\,2{,}972790\cdot\frac{\lambda}{2b}$ | $\pm\,3\cdot\frac{\lambda}{2b}$ | Maximum $\pm$ 3. Ordnung |

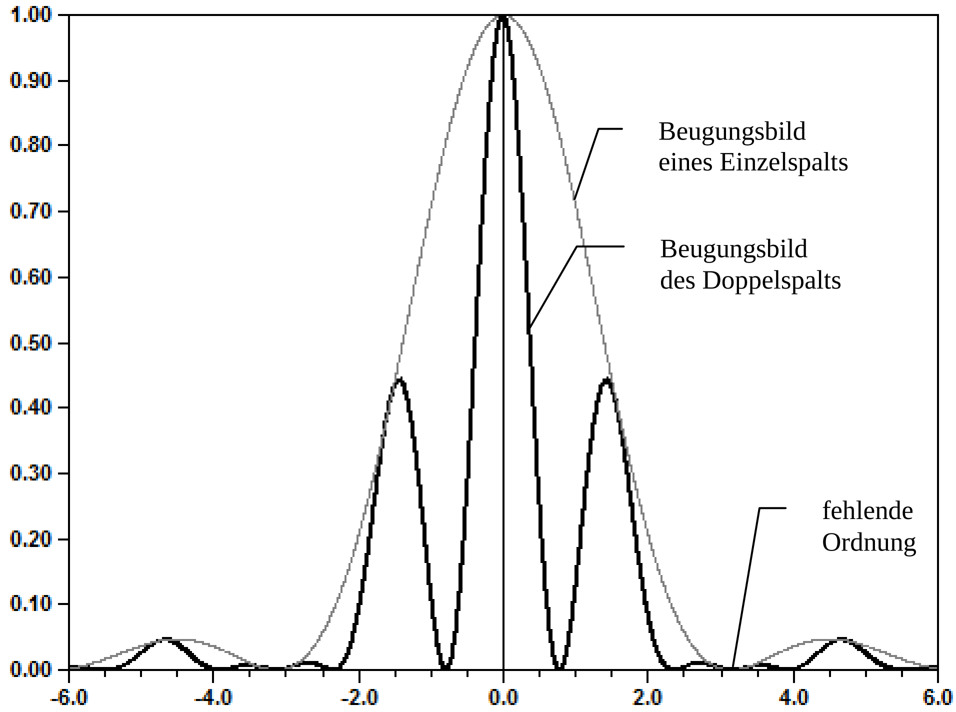


Abb. 2: Intensitätsverlauf hinter einem Doppelspalt mit $2b = 4a$ in Fraunhofer-Näherung

## 4. Zusammenfassung

Die Lage der Maxima eines Doppelspalts berechnet sich mit Hilfe von Gleichung

$$\alpha\cot\alpha - 1 = m\alpha\tan(m\alpha)\,. \tag{15}$$

Im Fall $2b = 4a$ liegt das Maximum erster Ordnung nicht bei $\sin\theta_1 = \frac{\lambda}{2b}$, sondern bei $\sin\theta_1 \approx 0{,}91\frac{\lambda}{2b}$. Die Abweichung beträgt in diesem Beispiel immerhin 9 %.

**Literaturverzeichnis:**

[1] F. Dorn, F. Bader: Physik – Grundkurs 12/13. Hannover: Schroedel Schulbuchverlag (1976), S. 91-93

[2] L. Bergmann, C. Schaefer: Lehrbuch der Experimentalphysik Bd. III (Optik). Berlin: De Gruyter (1978), S. 371-375