

Die Bernoulli-Gleichung für stationäre horizontale Strömungen

von

Axel Donges

erschienen in: Praxis der Naturwissenschaften - Physik in der Schule 4/52 (2003), S. 42-45

Zusammenfassung

Es wird die für eine Stromlinie gültige Bernoulli-Gleichung aus dem newtonschen Kraftgesetz hergeleitet und diskutiert. Außerdem wird die Druckänderung zwischen benachbarten Stromlinien in Normalenrichtung behandelt.

1. Einleitung

Die Bernoulli-Gleichung ist eine der wichtigsten Gleichungen der Strömungslehre. Sie sollte daher im Unterricht behandelt werden. Im Folgenden wird aus dem newtonschen Kraftgesetz die Bernoulli-Gleichung hergeleitet und an einigen wenigen Beispielen erläutert.

2. Herleitung der Bernoulli-Gleichung

Wir beschränken uns bei der Herleitung der Bernoulli-Gleichung [z.B. 1, S. 40-41, 2] auf stationäre und reibungsfreie Strömungen. Außerdem wird zur Vereinfachung der Einfluss der Schwerkraft vernachlässigt, d.h. der Schweredruck bleibt unberücksichtigt. Wegen der Stationarität bewegt sich ein Flüssigkeitsteilchen¹ stets längs einer Stromlinie. Da sich der Druck p entlang einer Stromlinie i. Allg. ändert, erfährt ein Flüssigkeitsteilchen längs seiner Stromlinie eine Beschleunigung. Für die zu der Stromlinie tangentiale Beschleunigung gilt (siehe Bild 1)

$$\rho dV a_t = -A_n dp . \quad (1)$$

Hierbei bedeuten: ρ : Dichte der Flüssigkeit, dV : Volumen der Flüssigkeitsteilchens, a_t : Tangentialbeschleunigung, A_n Querschnittsfläche (Stromlinie steht senkrecht auf Fläche) des Volumens dV und dp : Druckdifferenz zwischen Vorder- und Rückseite des Volumens dV . Mit

$$dV = A_n ds \quad (2)$$

(ds : Länge des Volumens dV in Richtung der Stromlinie) und

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds} v \quad (3)$$

folgt aus (1)

$$\rho v dv = -dp . \quad (4)$$

Integration von (4) liefert die bekannte Bernoulli-Gleichung (für horizontale Strömungen)

¹ Unter einem Flüssigkeitsteilchen wird hier ein (infinitesimal) kleines, mit Flüssigkeit gefülltes Volumen verstanden. Dieses Volumen schwimmt mit der strömenden Flüssigkeit mit. Es ist abgeschlossen, d.h. durch seine Oberfläche kann keine weitere Flüssigkeit ein- oder ausströmen.

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 = C = \text{const.} \quad (5)$$

C ist eine Integrationskonstante, die für jede Stromlinie einen anderen Wert haben kann. Gleichung (5) besagt, dass die Strömungsgeschwindigkeit v entlang einer Stromlinie zu- bzw. abnimmt (Wirkung), wenn der Druck p entlang der Stromlinie ab- bzw. zunimmt (Ursache).

Bei der Integration von (4) wurde die Dichte ρ als konstant angenommen. Diese Annahme ist bei Flüssigkeiten - im Gegensatz zu Gasen - sehr gut erfüllt. Bei nicht zu hohen Strömungsgeschwindigkeiten können allerdings die durch Druckänderungen hervorgerufenen Dichteänderungen eines Gases vernachlässigt werden. Die Bernoulli-Gleichung darf daher auch für strömende Gase angewendet werden, wenn die Strömungsgeschwindigkeiten deutlich unter der Schallgeschwindigkeit des benutzten Gases liegen [3].

3. Druckänderungen senkrecht zu Stromlinien

Ein Flüssigkeitsteilchen kann sich nur dann auf einer gekrümmten Stromlinie bewegen, wenn es eine Kraft in Richtung des Krümmungsmittelpunktes der Stromlinie erfährt (Bild 1). Für die Realisierung dieser Zentripetalkraft ist eine radiale Druckzunahme erforderlich. In Analogie zu (1) gilt

$$\rho dV a_n = -A_t dp \quad (6)$$

(A_t : Querschnittsfläche Volumens dV , Zentripetalbeschleunigung \vec{a}_n steht senkrecht auf der Fläche A_t). Mit der bekannten Formel für die Zentripetalbeschleunigung

$$a_n = -\frac{v^2}{R} \quad (7)$$

(R : lokaler Krümmungsradius der Stromlinie) sowie mit der zu (2) analogen Gleichung

$$dV = A_t dn \quad (8)$$

(dn : Länge des Volumens dV senkrecht zur Stromlinie) folgt

$$\frac{dp}{dn} = \rho \frac{v^2}{R} \quad (9)$$

Gleichung (9) stellt eine Verbindung zwischen den Drücken benachbarter Stromlinien her.

4. Strömungen mit parallelen Stromlinien

Als Beispiel zu Gleichung (9) wird eine Strömung, die in einem gewissen Raumbereich parallele Stromlinien besitzt, betrachtet (Bild 2). Dort, wo die Stromlinien parallel sind, gilt wegen $R \rightarrow \infty$

$$\frac{dp}{dn} = 0 \quad (10)$$

bzw. nach Integration

$$p = p_0 = \text{const.} \quad (11)$$

In einer parallelen Strömung herrscht also überall der gleiche Druck p_0 . Für einen mit einem Föhn erzeugten freien² Luftstrom bedeutet dies, dass der konstante Druck in der Strömung wegen (10) gleich dem Luftdruck (Druck der umgebenden ruhenden Luft) sein muss [2].

5. Parallelströmungen mit veränderlichem Querschnitt

Die meisten Beispiele der Schulphysik zur Bernoulli-Gleichung gehören zur Kategorie „homogene Parallelströmungen mit veränderlichem Querschnitt“. Es soll daher die in Bild 3 skizzierte Strömung genauer diskutiert werden. In einem Rohr strömt eine Flüssigkeit mit einer über dem Querschnitt konstanten Geschwindigkeit. Sowohl links (Strömungsgeschwindigkeit v_1) als rechts (Strömungsgeschwindigkeit v_2) von der Verjüngung liegt eine Parallelströmung vor. Deshalb herrscht überall auf der linken bzw. rechten Seite der gleiche Druck p_1 bzw. $p_2 \neq p_1$. Für jede beliebige Stromlinie gilt nach Bernoulli

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 . \quad (12)$$

Die Geschwindigkeiten links und rechts der Verjüngung sind über die Kontinuitätsgleichung [1, S. 37-39] miteinander verknüpft:

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 . \quad (13)$$

Damit folgt aus (12)

$$p_1 - p_2 = \left(\left(\frac{A_1}{A_2} \right)^2 - 1 \right) \frac{1}{2} \rho v_1^2 . \quad (14)$$

Auf der Seite mit dem größeren (kleineren) Querschnitt herrscht demnach auch immer der größere (kleinere) Druck. Nachfolgend werden zwei Freihandversuche beschrieben, die unter dieses Erklärungsmuster fallen.

5.1 Zwei-Blatt-Papier-Versuch

Zwei gleich große Blätter Schreibpapier (z.B. DIN-A5) werden rechtwinklig geknickt und wie in Bild 4 dargestellt in einem Abstand von etwa 1 cm zwischen den Händen gehalten [4, S. 253-254]. Bläst man kräftig zwischen die Blätter, so bewegen sie sich aufeinander zu bis sie sich berühren. Dadurch wird die Strömung unterbrochen. Die Blätter entfernen sich wegen der Schwerkraft wieder voneinander und das Spiel beginnt von Neuem. Erklärung: Über den beiden Blättern herrscht in der freien Parallelströmung normaler Luftdruck. Wenn die Strömung zwischen die beiden Blätter gezwungen wird (Engstelle), sinkt der Druck. Zwischen den beiden Blättern herrscht im Vergleich zum Außenraum ein Unterdruck, der die Beobachtung erklärt.

5.2 Zerstäuber

Ein dünnes Glasrohr (Innendurchmesser etwa 5 mm) wird senkrecht in ein Glas Wasser gehalten. Ein freier Luftstrom, in dem – unabhängig von der Strömungsgeschwindigkeit – normaler Zimmerluftdruck herrscht, wird am Zerstäuberrohrende eingeeengt, wodurch der Druck in diesem Bereich der Strömung sinkt (Bild 5). Der auf der Wasseroberfläche lastende

² „frei“ bedeutet dabei, dass die Luft nicht in einer Röhre strömt, die die strömende Luft von der umgebenden Raumluft trennt.

normaler Luftdruck kann so das Wasser im Zerstäuberrohr hochdrücken. Bei genügend großem Unterdruck erreicht das Wasser das Rohrende und wird mit der Strömung mitgerissen. Dieses Funktionsprinzip hat in der Technik viele Anwendungen gefunden (z.B. Spritzpistole, Vergaser).

6. Umströmung fester Körper

In eine zunächst homogene Parallelströmung wird ein fester Körper gebracht (Bild 6). In großer Entfernung vom diesem Körper ist die Strömung dann immer noch homogen, d.h. es liegt überall die gleiche Strömungsgeschwindigkeit v_∞ und der gleiche Druck p_∞ vor. Für zwei beliebige Stromlinien, z.B. die Linien 2 und 6 in Bild 6, und zwei beliebige Punkte U und W gilt nach Bernoulli:

$$p_\infty + \frac{1}{2} \rho v_\infty^2 = p_U + \frac{1}{2} \rho v_U^2 \quad (\text{für Stromlinie 2}) \quad (15)$$

$$p_\infty + \frac{1}{2} \rho v_\infty^2 = p_W + \frac{1}{2} \rho v_W^2 \quad (\text{für Stromlinie 6}). \quad (16)$$

Da die linken Seiten gleich sind, müssen auch die rechten Seiten der beiden Gleichungen identisch sein, d.h.

$$p_U + \frac{1}{2} \rho v_U^2 = p_W + \frac{1}{2} \rho v_W^2. \quad (17)$$

In diesem Beispiel gilt für alle Stromlinien in der Bernoulli-Gleichung (5) die gleiche Konstante C . Die Bernoulli-Gleichung (17) verknüpft Druck p und Strömungsgeschwindigkeit v zweier beliebiger Punkte, die nicht auf einer Stromlinie liegen müssen³.

Im sogenannten Staupunkt S, der unmittelbar vor dem umströmten Körper liegt (Bild 6), ist die Strömungsgeschwindigkeit null. Aus (17) folgt daher

$$p_S = p_\infty + \frac{1}{2} \rho v_\infty^2. \quad (18)$$

Durch Messung der Druckdifferenz zwischen Staupunkt und einem hinreichend weit entfernten Punkt kann der Term $\frac{1}{2} \rho v_\infty^2$ und damit die Strömungsgeschwindigkeit der ungestörten Parallelströmung bestimmt werden. Eine solche Messung kann mit dem in Bild 7 skizzierten Prandtlrohr erfolgen [1, S.44]. Die linke Öffnung des Staurohrs misst den Druck im Staupunkt (Gl. (18)). Da die Stromlinien über der rechten Öffnung des länglichen Prandtlrohr parallel verlaufen, herrscht dort der Druck p_∞ und das angeschlossene Manometer zeigt den sogenannten „Staudruck“ $\frac{1}{2} \rho v_\infty^2$ an.

7. Zusammenfassung

- Die Bernoulli-Gleichung (5) verknüpft Druck p und Strömungsgeschwindigkeit v an zwei beliebigen Punkten, die auf einer Stromlinie liegen. Sie besagt, dass in Folge

³ Dies gilt immer für wirbelfreie Strömungen, d.h. wenn für das Geschwindigkeitsfeld die Bedingung $\text{rot} \vec{v} = 0$ erfüllt ist [1, S. 39].

eines Druckabfalls (Druckanstiegs) entlang einer Stromlinie die Strömungsgeschwindigkeit zunimmt (abnimmt).

- Liegt (wenigstens) an einer Stelle über dem gesamten Strömungsquerschnitt eine homogene Parallelströmung vor, so können die beiden Punkte auch zu verschiedenen Stromlinien gehören.
- Liegen parallele Stromlinien vor, so ändert sich der Druck von Stromlinie zu Stromlinie in Normalenrichtung nicht. In einer freien, homogenen und parallelen Luftströmung, wie sie in etwa von einem Föhn erzeugt wird, herrscht daher der gleiche Druck wie in der ruhenden Umgebungsluft.
- Sind die Stromlinien gekrümmt, so ändert sich der Druck von Stromlinie zu Stromlinie in Normalenrichtung. Die Druckzunahme erfolgt in Richtung der Normalen, die vereinbarungsgemäß vom Krümmungsmittelpunkt der Stromlinie wegweist.

Anschrift des Verfassers:

Prof. Dr. Axel Donges

Fachhochschule und Berufskollegs NTA Prof. Dr. Grübler gGmbH

Seidenstraße 12-35

D-88316 Isny im Allgäu

eMail: ADonges@web.de

Bildunterschriften:

Bild 1: Zur Bewegung eines Flüssigkeitsteilchen entlang einer Stromlinie

Bild 2: Strömung mit partiell parallelen Stromlinien

Bild 3: Sich verjüngende Parallelströmung

Bild 4: Zwei-Blatt-Papier-Versuch

Bild 5: Prinzip eines Zerstäubers

Bild 6: Umströmung eines festen Körpers durch eine in großer Entfernung vom Körper homogene Parallelströmung

Bild 7: Aufbau eines Prandtlrohrs

Literatur

[1] E. Becker: Technische Strömungslehre: Eine Einführung in die Grundlagen und technischen Anwendungen der Strömungsmechanik. Stuttgart: Teubner (1977)

[2] K. Weltner, M. Ingelman-Sundberg: Misinterpretations of Bernoulli's Law. <http://www.rz.uni-frankfurt.de/~weltner/Mis6/mis6.html>

[3] Bergmann, Schaefer: Lehrbuch der Experimentalphysik, Bd. I: Mechanik, Akustik, Wärme. Berlin: de Gruyter (1974), S.306

[4] A. Friedrich (Hrsg.): Handbuch der experimentellen Schulphysik. Köln: Aulis (1962)

Bild 1:

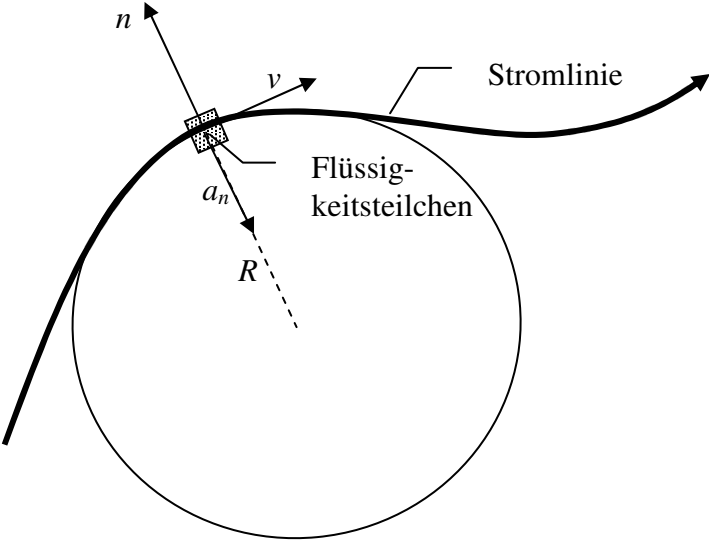


Bild 2

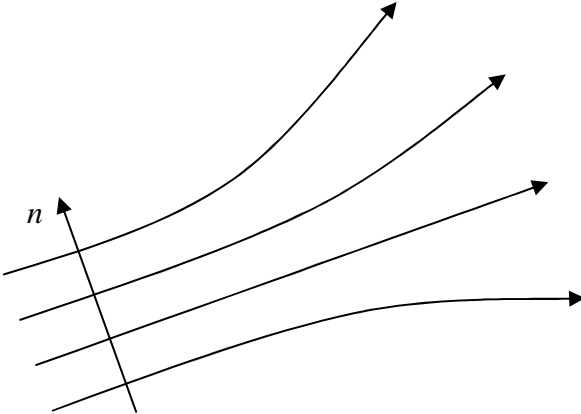


Bild 3

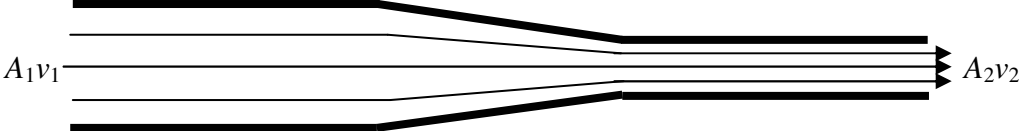


Bild 4

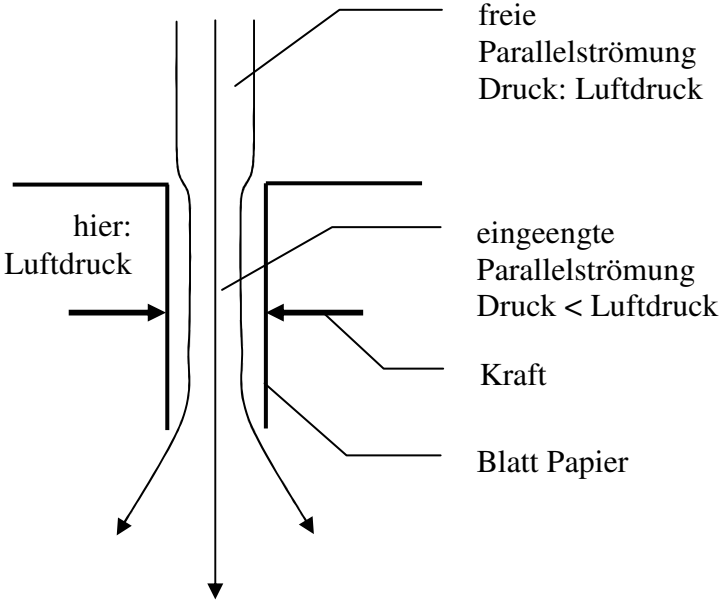


Bild 5

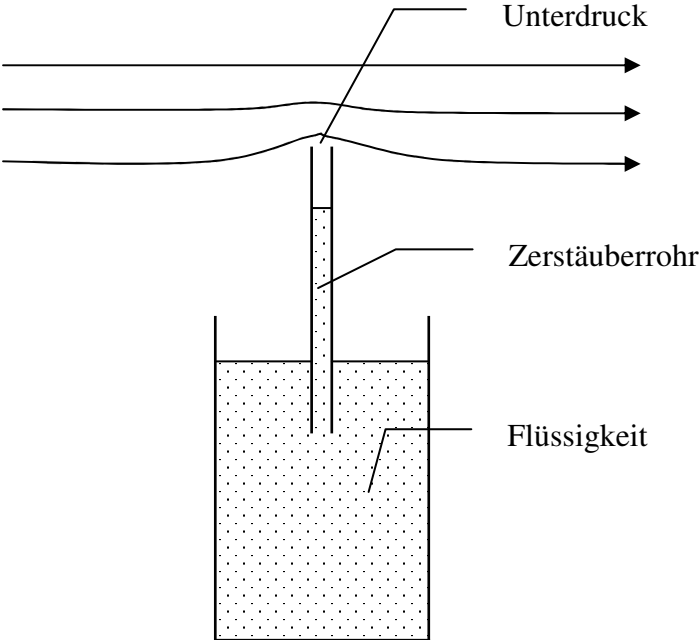


Bild 6

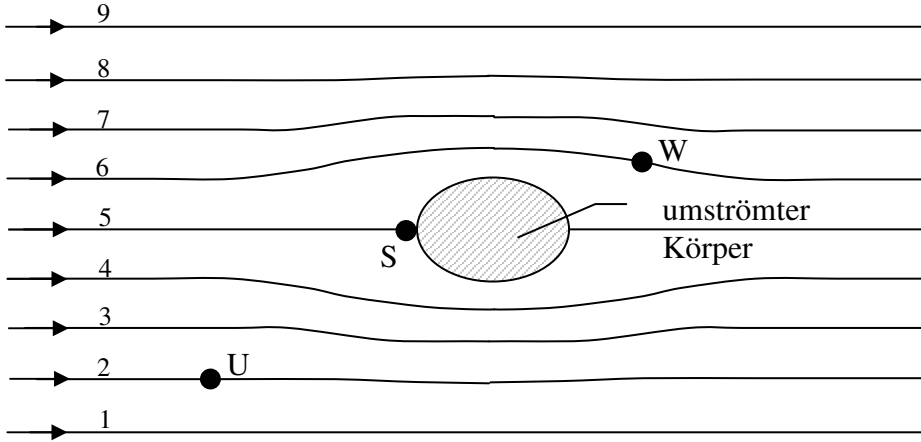


Bild 7

