Herleitung der Auftriebskraft für unregelmäßig geformte Körper

von

Axel Donges

Fachhochschule und Berufskollegs NTA Prof. Dr. Grübler gGmbH

Seidenstraße 12-35, D-88316 Isny im Allgäu, eMail: ADonges@web.de

erschienen in:

Praxis der Naturwissenschaften - Physik in der Schule 2/52 (2003), S. 45-46

Zusammenfassung

Das archimedische Prinzip wird ohne Kenntnis des Schweredrucks mit Hilfe einer Energiebetrachtung für unregelmäßig geformte Körper hergeleitet.

1. Einleitung

Zur Herleitung der Auftriebskraft wird üblicherweise ein waagrecht ausgerichteter Körper mit einer über seiner Höhe h konstanten Querschnittsfläche A betrachtet, der vollständig in eine Flüssigkeit mit der Dichte ρ_F eintaucht (Bild 1) [z.B. 1]. Die obere Fläche in der Tiefe h_1 erfährt wegen des Schweredrucks eine nach unten gerichtete Kraft mit dem Betrag

$$F_1 = (p_L + \rho_F g h_1)A \tag{1}$$

(p_L: Luftdruck, g: Erdbeschleunigung). In der Tiefe h_2 herrscht ein größerer Schweredruck, weshalb an der unteren Fläche eine größere, nach oben gerichtete Kraft mit dem Betrag

$$F_2 = (p_L + \rho_F g h_2)A \tag{2}$$

angreift. Die resultierende Kraft wirkt nach oben. Sie heißt Auftriebskraft und hat den Betrag

$$F_A = \rho_F g (h_2 - h_1)A = \rho_F g h A = \rho_F g V \tag{3}$$

(V: Volumen des Körpers). In Worten: Der Betrag der Auftriebskraft ist gleich dem Betrag der Gewichtskraft der verdrängten Flüssigkeit (Prinzip des Archimedes). Dass dieses Ergebnis auch für unregelmäßig geformte Körper gilt, lässt sich experimentell leicht zeigen [z.B. 1]. Auf eine theoretische Begründung wird in der Schule i.d.R. verzichtet. Im Folgenden wird eine einfache, für den Schulunterricht geeignete Herleitung des archimedischen Prinzips für unregelmäßig geformte Körper gegeben.

2. Herleitung der Auftriebskraft für unregelmäßig geformte Körper

Wir betrachten einen nichtschwimmenden Körper (Dichte ρ_K) beliebiger Gestalt, der an einer Schnur hängend vollständig in eine Flüssigkeit der Dichte $\rho_F < \rho_K$ eintaucht. Wird der Körper wird nun um die Strecke x angehoben, so ändert sich die potenzielle Energie des Systems (Bild 2). Die potenzielle Energie des Körpers nimmt um

$$E_K = \rho_K V g x \tag{4}$$

zu, während die potenzielle Energie der Flüssigkeit um

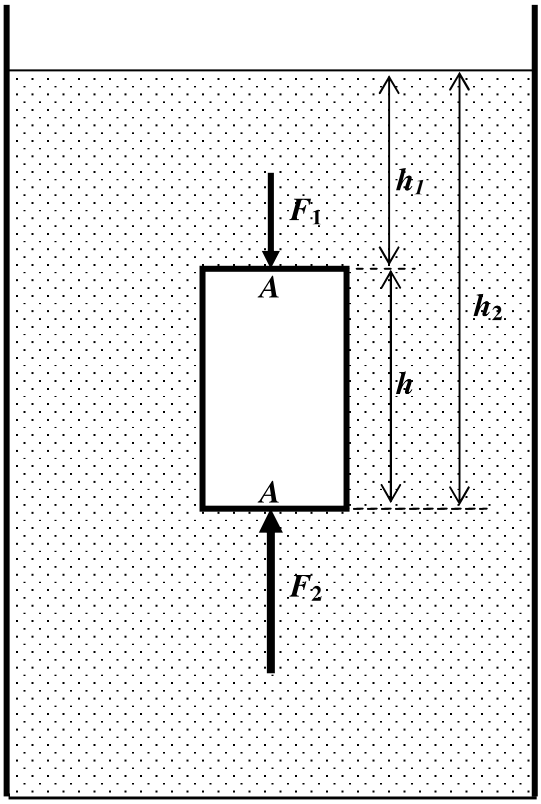

Bild 1: Zur Herleitung des archimedischen Prinzips (mit Schweredruck)

$$E_F = \rho_F V g x \tag{5}$$

abnimmt. Der Gewinn an potenzieller Gesamtenergie muss gleich der verrichteten Hubarbeit sein, d.h.

$$(\rho_K - \rho_F)Vgx = Fx\,. \tag{6}$$

Hierbei ist F der Betrag der notwendigen Gleichgewichtskraft, um den Körper unbeschleunigt in der reibungsfreien Flüssigkeit anzuheben. Aus (6) folgt unmittelbar ($x \neq 0$)

$$F = (\rho_K - \rho_F)Vg = G - F_A\,. \tag{7}$$

F ist die Differenz der Beträge der Gewichtskraft des Körpers und der sogenannten Auftriebskraft. Für die nach oben gerichtete Auftriebskraft gilt somit

$$F_A = \rho_F V g \tag{8}$$

Dieses Ergebnis gilt auch für $\rho_F \geq \rho_K$ (Bei der Herleitung muss allerdings berücksichtigt werden, dass die Kraft F in Bild 2 dann nach unten gerichtet ist).

3. Zusammenfassung

Die traditionelle Herleitung des archimedischen Prinzips in der Schule setzt einen geometrisch einfachen, waagrecht ausgerichteten Körper voraus. Außerdem müssen die Schüler Grundkenntnisse der Flüssigkeitsmechanik besitzen (Druck, insbesondere Schweredruck). Die in diesem Aufsatz vorgeschlagene Herleitung verzichtet auf diese Prämissen. Es wird nur ausgenutzt, dass zur Änderung der potenziellen Energie eines Systems Arbeit zu- oder abgeführt werden muss. Ein Baumstamm (mit $\rho_K < \rho_F$) schwimmt also deshalb in Wasser, weil mit dem

Absinken des Baumstamms eine (physikalisch nicht zu begründende) Zunahme der potentiellen Energie des Systems Baumstamm-Wasser verbunden wäre.

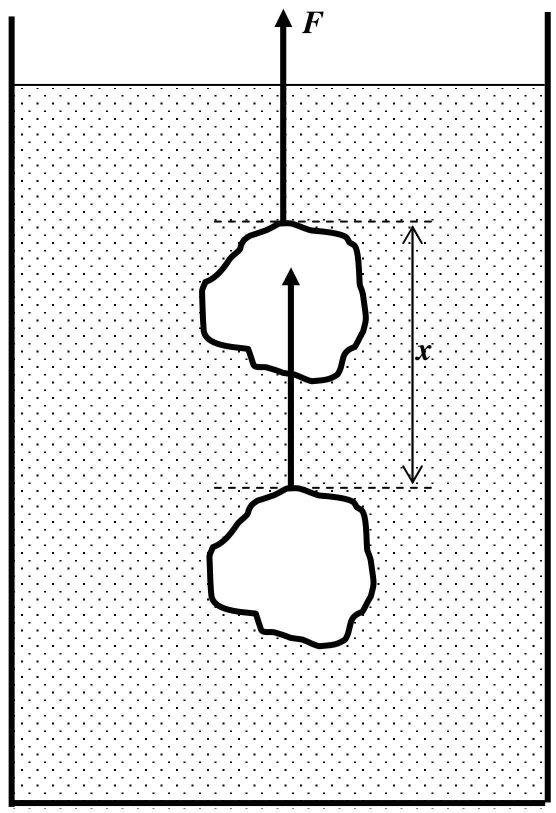

Bild 2: Zur Herleitung des archimedischen Prinzips (mit Energiebetrachtung)