

Ähnlichkeitsgesetz der Beugung

Anmerkungen zur Bedeutung der Fresnel-Zahl

A. Donges

1 | Einleitung

● Beugungsphänomene gehören zum festen Bestandteil eines jeden Physik-Curriculums. In der Schule wird in der Regel nur die Fraunhofer-Beugung behandelt, die an der Hochschule noch um die Fresnel-Beugung ergänzt wird. Sowohl für die Fresnel- als auch für die Fraunhofer-Beugung gilt ein Ähnlichkeitsgesetz, das im Folgenden hergeleitet wird.

2 | Das Huygens-Fresnel'sche Prinzip

● Bereits im Jahre 1690 wies *Christian Huygens* in seinem Buch *Traité de la lumiere* darauf hin, dass jeder Punkt P einer Welle als Ausgangspunkt einer kugelförmigen Sekundärwelle angesehen werden. Die Erregung U_Q in einem Punkt Q hinter einer beugenden Öffnung kann deshalb mit dem *Fresnel-Kirchhoff'schen Beugungsintegral* berechnet werden. Für den Fall einer senkrecht auf das beugende Hindernis fallende ebene Welle (siehe Abb. 1) gilt [1, 2]

$$U_Q \sim \iint_{\text{beugende Öffnung}} \frac{e^{ikr}}{r} (1 + \cos\theta) d\xi d\eta, \quad (1a)$$

wobei

$$r = L \sqrt{1 + \frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{L^2}} \quad (2)$$

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}{r} \quad (3)$$

und

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (4)$$

(k : Kreiswellenzahl, λ : Wellenlänge) bedeuten.

3 | Fresnel- und Fraunhofer-Beugung

● Für den Rest der Diskussion nehmen wir stillschweigend an, dass die Bedingung

$$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 \ll L^2 \quad (5)$$

erfüllt ist, d. h. dass alle auftretenden Winkel θ sehr klein sind. Aus diesem Grunde setzen wir in Gl. (1a) $r \approx L$, $\cos\theta \approx 1$ sowie in der phasensensitiven Exponentialfunktion

$$kr \approx kL \left(1 + \frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{2L^2} \right) \quad (6)$$

und erhalten als Näherung

$$U_Q \sim e^{ikL} \iint_{\text{normierte beugende Öffnung}} e^{i\pi F \left[\left(\frac{x-\xi}{a} \right)^2 + \left(\frac{y-\eta}{a} \right)^2 \right]} d\frac{\xi}{a} d\frac{\eta}{a} \quad (1b)$$

mit der dimensionslosen Kennzahl

Die Fresnel-Zahl F charakterisiert die Intensitätsverteilung

Ein Beispiel: Laserlicht mit $\lambda = 632,8 \text{ nm}$ tritt durch einen Spalt mit der Breite $2a = 1 \text{ mm}$. Die Intensitätsverteilung in $L = 1 \text{ m}$ Entfernung wird durch die Fresnel-Zahl

$$F = \frac{a^2}{\lambda L} = \frac{10^{-6}}{632,8 \cdot 10^{-9} \cdot 1} = 1,58$$

beschrieben (siehe Abb. 2).

$$F = \frac{a^2}{\lambda L} \quad (7)$$

Die normierte Intensitätsverteilung der gebeugten Welle berechnet sich damit zu

$$\frac{I\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right)}{I(0,0)} = \left| \iint_{\text{normierte beugende Öffnung}} e^{i\pi F \left[\left(\frac{x-\xi}{a} \right)^2 + \left(\frac{y-\eta}{a} \right)^2 \right]} d\frac{\xi}{a} d\frac{\eta}{a} \right|^2 \quad (8)$$

Hierbei ist a eine charakteristische Linear-dimension der beugenden Öffnung (z. B. der Radius im Fall einer Lochblende). Der dimensionslose Parameter F heißt *Fresnel-Zahl*. Gleichung (8) beschreibt die so genannte *Fresnel-Beugung*. Das Integral kann im Allgemeinen nur numerische gelöst werden (Abb. 2).

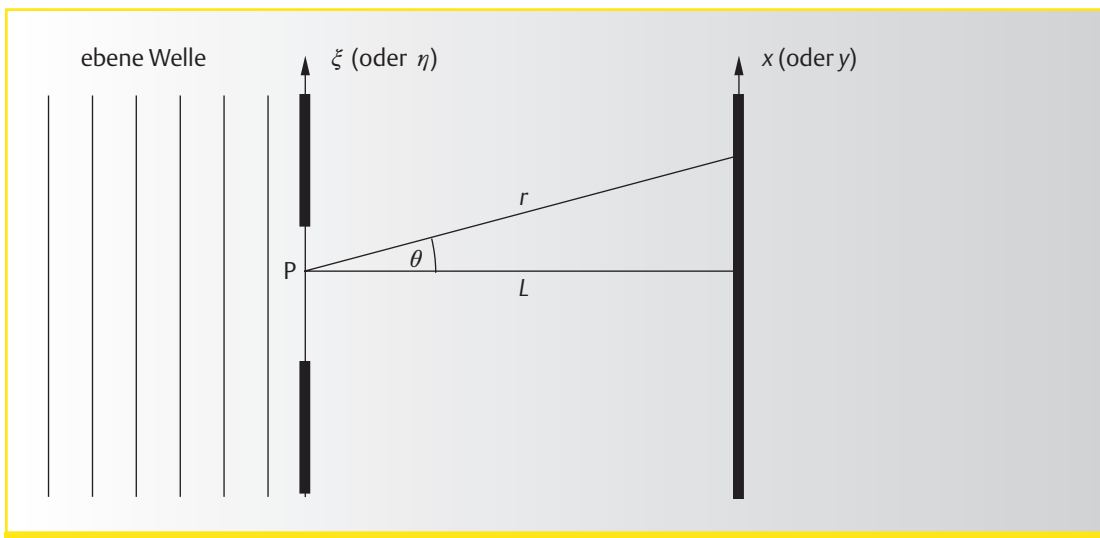
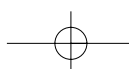


Abb. 1: Beugung einer ebenen Welle



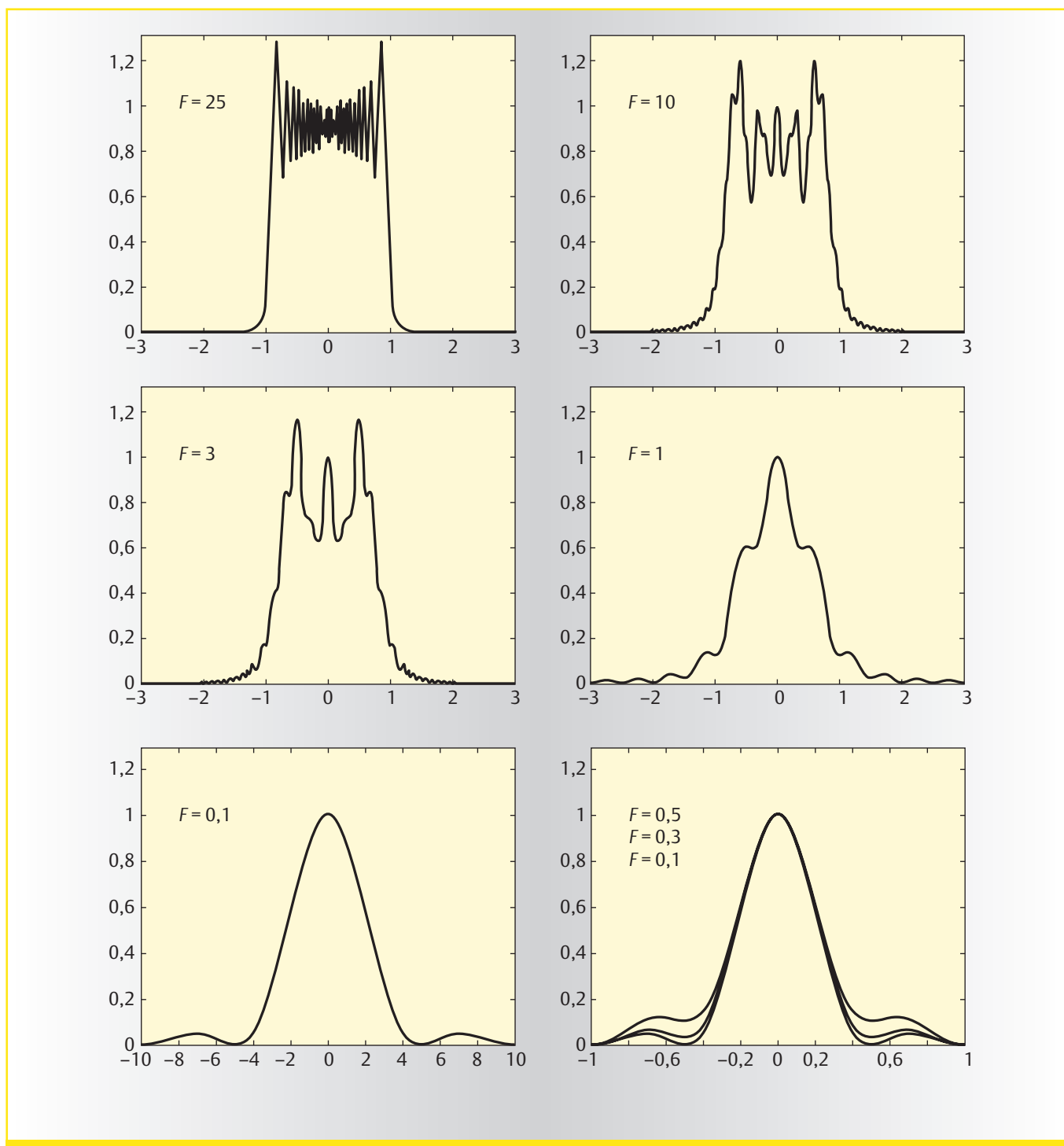


Abb. 2: Darstellung der Beugungsbilder hinter einem Spalt (Beleuchtung mit einer senkrecht auffallenden, ebenen und monochromatischen Welle) für verschiedene Fresnel-Zahlen. Ordinate: normierte Intensität $I(x/a)/I(0)$. Abszisse: auf den Halbmesser a des Spalts normierte Koordinate x/a bzw. im letzten Bild unten rechts Fx/a . Das Bild unten rechts zeigt: Im Fall der Fraunhofer-Beugung ($F \ll 1$) haben alle Bilder das gleiche Aussehen, wenn auf der Abszisse die normierte Koordinate Fx/a aufgetragen wird.

Eine wesentliche Vereinfachung ergibt sich, wenn die Terme $(\xi/a)^2$ und $(\eta/a)^2$ im Exponenten von Gl. (8)

$$\left(\frac{x-\xi}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-\eta}{a}\right)^2 = \frac{x^2 - 2x\xi + \xi^2 + y^2 - 2y\eta + \eta^2}{a^2} \quad (9)$$

vernachlässigt werden können. Dann gilt die so genannte *Fraunhofer-Näherung* [3]¹

¹ Man beachte, dass die Feldverteilung in der Beobachtungsebene der Fourier-Transformierten der (hier konstanten) Feldverteilung in der beugenden Öffnung entspricht [4].

$$\frac{I\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right)}{I(0,0)} =$$

$$\left| \iint_{\text{normierte beugende Öffnung}} e^{-i2\pi F \left[\frac{x\xi}{a^2} + \frac{y\eta}{a^2} \right]} d\frac{\xi}{a} d\frac{\eta}{a} \right|^2 \quad (10)$$

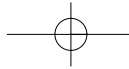
$$0 < F \ll 1 \quad (11)$$

realisiert ist. Von Fresnel-Beugung spricht man, wenn in etwa

$$0,1 < F \ll 10 \quad (12)$$

Ist a von der Größenordnung der maximalen Lineardimension der beugenden Öffnung, so liegt der *Fraunhofer-Fall* vor, wenn

erfüllt ist. Wie die Beispiele in Abb. 2 vermuten lassen, spielt die Beugung für $F \gg 1$ nur noch eine untergeordnete Rolle (Grenzfall der *geometrischen Optik*) [5].



$2a$ in mm	10,0	1,00	0,10	0,01	
L in m		Laserlicht			
0,01	4000	40	0,4	0,004	
0,10	400	4	0,04	0,0004	
1,00	40	0,4	0,004	0,00004	
10,0	4	0,04	0,0004	0,000004	

Tab. 1: Auf zwei Stellen gerundete Werte der Fresnel-Zahl F für eine Wellenlänge von $\lambda = 632,8$ nm berechnet mit Formel (7). Ein Beispiel: Bei einer Spaltbreite von $2a = 1$ mm und einem Abstand $L = 1$ m beträgt $F = 0,4$. Die zugehörige Intensitätsverteilung zeigt Abb. 2 näherungsweise durch die Verteilungen für $F = 0,5$ und $F = 0,3$. F kommt dabei die Rolle eines Parameters der Verteilung zu.

$2a$ in mm	10,0	1,00	0,10	0,01	
L in m		Schall			
0,10	740	7,4	0,074	0,00074	
1,00	74	0,74	0,0074	$< 10^{-4}$	
10,0	7,4	0,074	$< 10^{-4}$	$< 10^{-4}$	
100	0,74	0,0074	$< 10^{-4}$	$< 10^{-4}$	

Tab. 2: Auf zwei Stellen gerundete Werte der Fresnel-Zahl F für eine Wellenlänge von $\lambda = 0,34$ m (Schall mit der Frequenz 1 kHz) berechnet mit Formel (7). Ein Beispiel: Bei einer Spaltbreite von $2a = 1$ m und einem Abstand $L = 1$ m beträgt $F = 0,74$. Die zugehörige Intensitätsverteilung zeigt Abb. 2 näherungsweise durch die Verteilungen für $F = 0,5$ und $F = 1,0$.

4 | Ähnlichkeitsbetrachtungen

Die Gleichungen (8) und (10) sagen aus, dass die in normierten (dimensionslosen) Koordinaten (x/a , y/a) dargestellte und auf normierte (dimensionslose) Intensität eines Beugungsbildes nur

- von der geometrischen Form der beugenden Öffnung und
- von der dimensionslosen Fresnel-Zahl F abhängt.

Mit anderen Worten: Wenn bei zwei verschiedenen Beugungsexperimenten mit geometrisch ähnlichen beugenden Öffnungen² die Fresnel-Zahlen übereinstimmen, so ergeben sich die gleichen normierten Intensitätsverläufe. Anordnungen mit gleichen Fresnel-Zahlen werden daher als *ähnlich* bezeichnet [6, 7]. Aus diesem Grunde nennt man die Fresnel-Zahl F auch einen Ähnlichkeitsparameter.

Beispiel: Die Beugung einer elektromagnetischen Welle mit $\lambda = 10$ cm an einer Lochblende mit Radius $a = 10$ m liefert im Abstand $L = 1$ km hinter der beugenden Öffnung das gleiche normierte Beugungsbild wie die Beugung von sichtbarem Licht mit $\lambda = 500$ nm im Abstand von $L = 50$ cm hinter einer Lochblende mit Radius $a = 0,5$ mm. Begründung: In beiden Fällen beträgt die Fresnel-Zahl $F = 1$.

² Geometrisch ähnliche beugende Öffnungen unterscheiden sich nur im Maßstab.

Ähnlichkeitsbetrachtungen gestatten es somit, Beugungsexperimente mit unhandlichen Dimensionen (z. B. $a = 10$ m und $L = 1$ km) so abzuändern, dass eine experimentelle Untersuchung im Labor möglich wird [8]. Man muss lediglich darauf achten, dass beide Fresnel-Zahlen übereinstimmen, d. h. dass beide experimentelle Anordnungen ähnlich sind (Ähnlichkeitsgesetz).

Ähnlichkeitsbetrachtungen werden in den verschiedensten Bereichen von Wissenschaft und Technik ausgenutzt. In der Literatur wird über mehr als 200 dimensionslose Ähnlichkeitsparameter berichtet [9]. Besonders bekannt dafür ist die Hydrodynamik. Als Beispiel sei der stationäre Fluss eines inkompressiblen, viskosen Fluids durch ein Rohr genannt. Hier werden zwei Anordnungen als ähnlich bezeichnet, wenn sie durch die gleiche *Reynolds-Zahl*

$$Re = vr\rho/\eta \quad (13)$$

(v : Strömungsgeschwindigkeit, ρ : Massendichte, η : Viskosität des Fluids und r : Radius des Rohres) charakterisiert werden. Steigert man die Strömungsgeschwindigkeit in dem Rohr langsam von Null an, so schlägt bei den verschiedensten experimentellen Bedingungen die laminare Strömung immer dann in eine turbulente um, wenn die Reynolds-Zahl den Wert 1160 übersteigt [10].

5 | Zusammenfassung

Die normierte Intensitätsverteilung hinter einer beugenden Öffnung hängt nur von der geometrischen Form der beugenden Öffnung und von der Fresnel-Zahl F ab. Experimentelle Anordnungen mit beugenden Öffnungen der gleichen Form und gleicher Fresnel-Zahl werden daher als ähnlich bezeichnet.

- Das Ähnlichkeitsgesetz der Beugung lautet: Sofern die Kleinwinkel-Näherung (5) erfüllt ist, sind alle Beugungsbilder von experimentellen Anordnungen mit geometrisch ähnlichen Beugungsöffnungen und gleicher Fresnel-Zahl $F = a^2/(\lambda L)$ ähnlich, d. h. bei normierter Darstellung ergeben sich die gleichen Beugungsbilder.
- Der dimensionslosen Fresnel-Zahl kommt dabei die Rolle eines Ähnlichkeitsparameters zu.
- Mit Hilfe der Fresnel-Zahl lässt sich die Beugung charakterisieren: $F \gg 1$: geometrische Optik, $F \approx 1$: Fresnel-Beugung, $F \ll 1$: Fraunhofer-Beugung.

Literatur

- [1] Klein, V. M. u. Furtak, Th. E.: Optik, Springer, Berlin 1988, S. 266
- [2] Born, M. u. Wolf, E.: Principles of Optics, Pergamon Press, Oxford 1975, S. 380
- [3] Haferkorn, H.: Optik, Harry Deutsch, Thun 1981, S. 138
- [4] Hecht, E.: Optik. McGraw-Hill, Hamburg 1987, S. 211-235
- [5] Brunner, W. u. Junge, K.: Lasertechnik: Eine Einführung, Hüthig, Heidelberg 1984, S. 57
- [6] Sommerfeld, A.: Vorlesungen über theoretische Physik, Bd. 4 (Optik), Harri Deutsch, Thun 1978, S. 191-193
- [7] Zierep, J.: Ähnlichkeitsgesetze und Modellregeln der Strömungslehre, G. Braun, Karlsruhe 1972
- [8] Arkadiew, W.: Phys. Z. 14, S. 832 (1913)
- [9] Gitterman, M. u. Halpern, V. (1981): Qualitative Analysis of Physical Problems. Academic Press, New York, S. 71
- [10] Reynolds, O.: Phil. Transactions of the Royal Society 174 (1883), S. 935-982

Anschrift des Verfassers

Prof. Dr. Axel Donges, Fachhochschule und Berufskollegs NTA Prof. Dr. Grübler gGmbH, Seidenstraße 12-35, D-88316 Isny im Allgäu, E-Mail: ADonges@web.de

