Prof. Dr. AXEL DONGES, Fachhochschule und Berufskollegs NTA Prof. Dr. GRÜBLER, Seidenstraße 12–35, 88316 Isny i. Allgäu, AD@fh–isny.de

Anmerkungen zur Ablenkung geladener Teilchen in elektrostatischen Querfeldern

Die Berechnung der Ablenkung geladener Teilchen im elektrostatischen Feld eines Plattenkondensators gehört zu den Standardaufgaben im Unterricht. Da zur Vereinfachung die Feldinhomogenitäten am Rand des Kondensators üblicherweise vernachlässigt werden, ergeben sich paradoxe Ergebnisse für die kinetische Energie des Elektrons.

1 Einleitung

Die Ablenkung geladener Teilchen im elektrostatischen Querfeld eines Plattenkondensators wird im Physikunterricht üblicherweise behandelt. Zur Vereinfachung werden i. d. R. die Feldinhomogenitäten am Rand des Plattenkondensators vernachlässigt. Dies führt bei Schülern oft zu einer falschen Vorstellung von der Energieänderung, die ein geladenes Teilchen beim Durchlaufen des Ablenkkondensators erfährt.

2 Ablenkung eines Elektrons im homogenen Querfeld

In vielen Lehrbüchern [z. B. 1–4] finden sich Aufgaben vom folgenden Typ: Ein Elektron bewegt sich zunächst im feldfreien Raum gleichförmig mit der Geschwindigkeit v_0 parallel zur x-Achse (siehe Bild 1). Bei $(x, y) = (0, y_1)$ tritt das Elektron in das homogen angenommene elektrische Feld eines Plattenkondensators (Länge l, Plattenabstand d) ein. Durch die im Bereich $0 \le x \le l$ und $-\frac{d}{2} < y < \frac{d}{2}$ vorliegende Feldstärke

$$E_y = -E_0 = -\frac{U_0}{d} \tag{1}$$

erfährt das Elektron eine Beschleunigung in y-Richtung:

$$a_y = \frac{eU_0}{md}. \tag{2}$$

Hierbei ist e die Elementarladung und m die Ruhemasse des Elektrons (nichtrelativistische Rechnung). a_y ändert an der Geschwindigkeit in x-Richtung nichts. Folglich braucht das Elektron zum Durchlaufen des Ablenkkondensators die Zeit

$$\tau = \frac{l}{v_0}. \tag{3}$$

Während dieser Zeit erhält das Elektron eine Geschwindigkeitskomponente in y-Richtung von

$$v_y(l) = a_y \tau = \frac{eE_0 l}{mv_0}. \tag{4}$$

Das Elektron, das den Kondensator auf einer Parabelbahn durchläuft, verlässt den Kondensator bei $x = l$ und

$$y_2 = y_1 + 0\frac{eE_0 l^2}{2mv_0^2}. \tag{5}$$

(Es wird angenommen, dass das Elektron nicht auf die obere Ablenkplatte trifft, d. h. $y_2 < d/2$ ist.) Nach dem Verlassen des homogenen Feldes fliegt das Elektron kräftefrei und geradlinig weiter. Für die Geschwindigkeiten in x- bzw. y-Richtung gilt dann:

$$v_x = v_0 \tag{6}$$

bzw.

$$v_y = \frac{eE_0 l}{mv_0}. \tag{4‘}$$

Nach dem Austritt aus dem Feld bewegt sich das Elektron mit der resultierenden Geschwindigkeit

$$v_{\text{res}} = \sqrt{v_0{}^2 + \left(\frac{eE_0 l}{mv_0}\right)^2}. \tag{7}$$

Der Winkel des resultierenden Geschwindigkeitsvektors zur x-Achse berechnet sich zu

$$\theta = \arctan\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = \arctan\left(\frac{eE_0 l}{mv_0^2}\right). \tag{8}$$

3 Änderung der kinetischen Energie des Elektrons

Ein für die weitere Diskussion wichtiger Punkt ist, dass sich (laut Rechnung) die kinetische Energie des Elektrons beim Durchlaufen des Feldes des Ablenkkondensators um

$$W_{kin} = \frac{m}{2}\,(v_{\text{res}}^2 - v_0^2) = \frac{(eE_0 l)^2}{2mv_0^2} \tag{9}$$

erhöht. Vereinzelt wundern sich Schüler, welche Energiequelle für diese Zunahme verantwortlich ist, bleibt

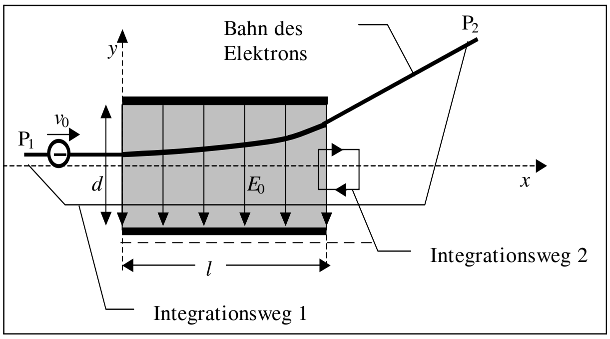

Abb. 1. Schematische Darstellung der Flugbahn eines Elektrons durch das homogen angenommene E-Feld eines Plattenkondensators

doch die Ladung des (isolierten) Kondensators unver- ndert.
Wir werden diese Frage nicht weiter verfolgen und versuchen stattdessen das Ergebnis (9) nochmals auf anderem Wege herzuleiten. Dazu berechnen wir die Spannung zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 links und rechts vom Kondensator ber das Integral

$$_{12} = -\int_{P_1}^{P_2} \boldsymbol{E} \quad d\boldsymbol{s} \qquad (10)$$

und w hlen den in Abbildung 1 dargestellten Integrationsweg 1. Offensichtlich ergibt sich:

$$U_{12} = 0. \qquad (11)$$

Nach dieser berlegung ndert sich die kinetische Energie des Elektrons beim Durchlaufen des Kondensators nicht

$$W_{kin} = 0. \qquad (12)$$

4 Auflösung des Paradoxons

Der Widerspruch zwischen den Ergebnissen (9) und (12) l sst sich nicht beheben, d. h. beide Rechnungen wurden korrekt durchgef hrt. Das Paradoxon ist eine Folge der Tatsache, dass beide Berechnungen f r eine physikalisch nicht realisierbare Feldverteilung durchgef hrt wurden: Das angenommene elektrostatische Feld ist *nicht* wirbelfrei. Zum Beweis betrachten wir das Integral

$$\oint \boldsymbol{E} \quad d\boldsymbol{s},$$

das beispielsweise f r den in Abbildung 1 angegebenen geschlossenen Integrationsweg 2 *nicht* verschwindet. Die behandelte Aufgabe ist daher im strengen Sinne als unl sbar bzw. falsch gestellt zu bezeichnen. Die Frage nach der Energie nderung l sst sich nur dann korrekt beantworten, wenn der Berechnung ein *wirbelfreies* elektrostatisches Feld zu Grunde gelegt wird.

5 Beispiel einer Berechnung für ein wirbelfreies Feld

Nachfolgend wird eine zu Abschnitt 2 analoge Berechnung der Ablenkung f r ein wirbelfreies Feld durchgef hrt. Der angenommene Feldverlauf entspricht zwar nicht dem realen Feld eines Plattenkondensators, er stellt jedoch im Vergleich zu Abschnitt 2 eine bessere Approximation des tats chlichen Feldverlaufs dar.
Wir gehen zun chst von dem gleichen *E*-Feld wie zuvor aus (Abb. 1). Damit das Feld jedoch wirbelfrei wird (rot $\boldsymbol{E}$ = 0), wird eine Feldkomponente in *x*-Richtung eingef hrt, f r die gelten muss [5]:

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x}. \qquad (13)$$

Die partizielle Ableitung $\frac{\partial E_y}{\partial x}$ verschwindet berall mit Ausnahme von $x = 0$ und $x = l$. F r die *x*-Komponente des Feldes gilt

daher im Bereich $-\frac{d}{2} < y < \frac{d}{2}$

$$E_x = \quad E_0 \delta(x) y \qquad (14a)$$

bzw.

$$E_x = E_0 \delta(x - l) y \qquad (14b)$$

(δ: Diracsche Deltafunktion[1]), wobei die Integrationskonstante zu Null gew hlt wurde [6]. Zwischen einem Punkt (x_l, y) links vom Kondensator und einem Punkt (x_r, y) zwischen den Kondensatorplatten herrscht somit eine Spannung von

$$U = \int_{x_l < 0}^{x_r > 0} E_0 \delta(x) y dx = E_0 y. \qquad (15)$$

Die kinetische Energie des Elektrons ndert sich somit beim Eintritt ins elektrische Feld um

$$\Delta W_{kin} = eE_0 y. \qquad (16)$$

Das Gleiche gilt, nur mit umgekehrtem Vorzeichen, wenn das Elektron rechts den Kondensator wieder verl sst. Die gesamte nderung der kinetischen Energie betr gt daher

$$W_{kin} = \quad eE_0(y_2 - y_1) < 0. \qquad (17)$$

(y_1, y_2: *y*-Koordinate des Elektrons beim Eintritt ins bzw. Austritt aus dem *E*-Feld). Da stets $y_2 > y_1$ ist, verliert das Elektron beim Ein- und Austritt insgesamt Energie. Dieser Energieverlust wird jedoch gerade durch die Energieaufnahme ($eE_0(y_2 - y_1)$) beim Durchlaufen der Feldes (1) kompensiert. Das Elektron verl sst damit das Feld mit der gleichen Energie bzw. Geschwin-

[1] Die diracsche Deltafunktion δ(*x*) ist berall Null mit Ausnahme von *x* = 0. F r das Integral gilt $\int_{x_l < 0}^{x_r > 0} \delta(x) dx = 1.$

digkeit, mit der es eingetreten ist. Dieses Ergebnis gilt auch f r das reale Feld eines Ablenkkondensators [6]. Damit er brigt sich die in Abschnitt 3 aufgeworfene Frage nach der Energiequelle.
Beim Eintritt in das elektrische Feld gewinnt (f r $y_1 > 0$) bzw. verliert (f r $y_1 < 0$) das Elektron Energie. Die Geschwindigkeitskomponente in x-Richtung betr gt daher zwischen den Ablenkplatten

$$v_{0x} = \sqrt{{v_0}^2 + \frac{2eE_0y_1}{m}} \tag{18}$$

und nicht wie zuvor angenommen v_0. Die Gleichungen (3) (5) und (8) m ssen deshalb wie folgt korrigiert werden:

$$\tau = \frac{l}{kv_0}, \tag{19}$$

$$v_y(l) = \frac{eE_0l}{kmv_0}, \tag{20}$$

$$y_2 = y_1 + \frac{eE_0l^2}{k^2 2mv_0^2} \tag{21}$$

und

$$\theta = \arctan\left(\frac{v_y}{v_{0x}}\right) = \arctan\left(\frac{eE_0l}{k^2mv_0^2}\right) \tag{22}$$

mit

$$k = \sqrt{1 + \frac{2eE_0y_1}{mv_0^2}}. \tag{23}$$

6 Zahlenbeispiel

Wir betrachten als Beispiel einen Ablenkkondensator mit l = 10 cm und d = 2,0 cm, an dem eine Ablenkspannung von U_0 = 3,5 V anliegt. Das Elektron m ge mit einer Geschwindigkeit von $v_0 = 3{,}0 \quad 10^6$ m/s auf den Kondensator zu fliegen und bei $y_1 = \quad 9{,}0$ mm in das Feld eintreten.
Nach der in Abschnitt 2 durchgef hrten Rechnung tritt das Elektron unter einem Winkel von $\theta = 19$ bei y_2 = 8,1 mm mit einer Geschwindigkeit von $v_{res} = 3{,}2 \quad 10^6$ m/s aus dem Feld aus. F r das gleiche Zahlenbeispiel liefert die in Abschnitt 5 aufgezeigte berlegung die Werte $\theta = 21$, y_2 = 9,2 mm und $v_{res} = 3{,}0 \quad 10^6$ m/s.

7 Schlussbemerkung

Die in Abschnitt 2 durchgef hrte Berechnung beschreibt i.Allg. nur grob die Ablenkung geladener Teilchen in einem Ablenkkondensator. Au erdem liefert

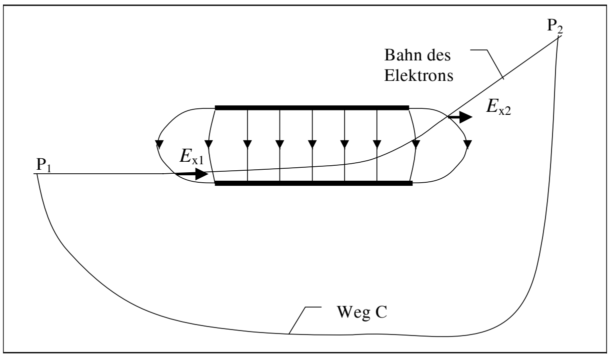

Abb. 2. Bahnkurve eines Elektrons im elektrostatischen Feld eines Plattenkondensators (qualitative Darstellung)

die Rechnung ein paradoxes Ergebnis: die Zunahmen der kinetischen Energie des geladenen Teilchens beim Durchlaufen des kompletten Feldes. Dies ist falsch und f hrt viele Sch ler in die Irre. Die (f lschlicherweise) berechnete Erh hung der kinetischen Energie ist auf die Vernachl ssigung der inhomogenen Randfelder des Kondensators zur ckzuf hren. Diese Tatsache l sst sich auch ohne komplizierte Rechnung den Sch lern vermitteln:
Bei der in Abbildung 2 dargestellten Situation wirkt auf das Elektron sowohl beim Eintritt in das als auch beim Austritt aus dem inhomogenen E-Feld eine Kraft in (x)-Richtung. Damit wird klar, dass die x-Komponente der Austrittsgeschwindigkeit kleiner als v_0 sein muss.
Als weiteres Argument l sst sich anf hren, dass bei der Verschiebung eines Elektrons im feldfreien Raum von P_1 nach P_2 (z. B. l ngs des Weges C, siehe Abb. 2) keine Arbeit verrichtet wird. Deshalb muss auch an beiden Punkten die kinetische Energie den gleichen Wert aufweisen.

Literatur

[1] DORN – BADER: Physik in einem Band. – Hannover: Schroedel 1976, 373–374.

[2] GROSS – BERHAG: Felder. – Stuttgart: Ernst Klett 1985, S. 38–39.

[3] A. MÜLLER – E. LEITNER – F. MRÁZ: Unterrichtswerk der Physik (Grundkurs 1. und 2. Semester). – München: Ehrenwirth 1996, 66–68.

[4] A. M. PORTIS – H. D. YOUNG: Physik und Experiment (Berkeley Physik Kurs, Bd. 6). – Braunschweig: Vieweg 1980, 84–86.

[5] K. MEETZ – W. L. ENGL: Elektromagnetische Felder. – Berlin: Springer 1980, 141.

[6] CH. A. COOMBERS: Energy change in deflecting plates.– Am.J.Phys. **47** (1979) 555.